

Die logistische Gleichung als ein Beispiel für chaotische Prozesse in der Physik

Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung
für das Lehramt Haupt- und Realschule

vorgelegt von
Nils Grzech

Rostock, 11.10.2012

Themensteller: Dr. Reinhard Mahnke

Theoretische Physik/Physik/Universität Rostock/Naturwissenschaftliche
Fakultät

1 Einleitung

Unser Leben ist umgeben von chaotischen Prozessen, Prozesse deren Ausgang wir nicht vorhersagen können. So lässt sich nicht vorhersagen, welches Muster beim Auskippen einer Tüte Linsen auf dem Boden entsteht oder welche Positionen die Billardkugeln nach dem Anstoßen auf dem Billardtisch haben, selbst wenn man vermeintlich die gleichen Anfangsbedingungen realisieren würde. Sogar das Wetter lässt sich trotz des technischen Fortschritts nicht weiter als drei Wochen vorhersagen. Darüber hinaus gibt es Prozesse, bei denen man zu Anfang glaubt, dass eine gewisse Regelmäßigkeit auftritt, die dann jedoch ebenso ins Chaos übergehen, so zum Beispiel der tropfende Wasserhahn. Dreht man den Wasserhahn langsam genug auf, geht eine anfangs gleichmäßige Reihe von Tropfen in eine chaotische Folge von Tropfen über. Ein solches System, wie der tropfende Wasserhahn bildet auch die logistische Gleichung. Im Gegensatz zur mathematischen Beschreibung des tropfenden Wasserhahns, basiert die logistische Gleichung auf einem relativ einfachen mathematischen Ausdruck. Dieses ist auch der Grund für die Entscheidung zu dem Thema der Examensarbeit. Das Forschungsgebiet um das chaotische Verhalten von nichtlinearen Systemen ist relativ jung, da man vor Henri Poincaré¹ die Annahme eines deterministischen Weltbildes hatte. Man ging davon aus, dass sämtliche Systeme mit ausreichend Information berechenbar und somit vorhersagbar waren. Umso erstaunlicher ist das Interesse an diesem neuen Forschungsgebiet, welches von den verschiedensten Gesichtspunkten aus betrachtet werden kann. So finden sich Chaosforscher in der Mathematik, Physik, Biologie und Meteorologie oder sogar in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften. Die Chaostheorie ist somit eines der wenigen Forschungsgebiete, die eine Vereinigung einer solchen Vielzahl von Wissenschaften ermöglicht. Trotz eines so großen Vielfalt an Möglichkeiten zur Beschreibung von chaotischen Systemen, begrenzt sich diese Arbeit auf die logistische Gleichung.

Um das chaotische Verhalten der logistischen Abbildung zu zeigen, müssen zuerst grundlegende Eigenschaften dieser aufgeführt werden. Dieses beginnt im Kapitel 4 mit einer historischen Herleitung der logistischen Gleichung in Bezug zu einem demographischen Modell von Pierre-François Verhulst². Darüber hinaus wird das Grenzverhalten des Rückkopplungsmechanismus in der logistischen Gleichung im Kontext zur Wachstumsrate beleuchtet. Die Kapitel 5 und 6 dienen zur graphischen Modellierung diskreter

¹Henri Poincaré (* 29. April 1854 in Nancy; † 17. Juli 1912 in Paris) war ein französischer Mathematiker, welcher bei der Untersuchung der Stabilität des Sonnensystems chaotische Muster feststellte. (Vgl. KÖNIGSBERGER, S. 162-163)

²Pierre-François Verhulst (* 28.10.1804, † 15. Februar 1849) war ein belgischer Mathematiker, dessen demographisches Modell auf der logistischen Gleichung aufbaute. (MAHNKE, 1994, Vgl.)

nichtlinearer Systeme, im Speziellen der logistischen Gleichung, mithilfe von Maple und der graphischen Iteration. Die beiden Kapitel grenzen sich durch ihre Betrachtungsweise voneinander ab. Kapitel 5 beschreibt das Zeitverhalten der logistischen Gleichung und steht damit im Kontrast zu Kapitel 6, welches das Langzeitverhalten mithilfe der graphischen Fixpunktiteration untersucht. Das Kapitel 7 setzt sich mit der analytischen Beschreibung des Langzeitverhalten der logistischen Gleichung auseinander. Hierzu wird mithilfe des Lyapunov-Exponenten die Stabilität des Systems überprüft und es werden Aussagen über das chaotische Verhalten der logistischen Gleichung getroffen. Im Kapitel 8 wird das Feigenbaumdiagramm numerisch mithilfe von Maple dargestellt und im Kontext zum Lyapunov-Exponenten betrachtet. Es folgt eine Analyse des chaotischen Bereichs und ein kurzer Einblick in die Welt der Fraktale. Die historische Entwicklung sowie Grundlagen der Chaosforschung werden in Kapitel 9 behandelt und schließen mit Beispielen von chaotischen Prozessen aus unserer Umwelt in Kapitel 10 ab. Um einen Bezug zur Schule herzustellen, werden im Kapitel 11 Möglichkeiten von iterativen Berechnungen in der Schule vorgestellt.

1.1 Entscheidungsgrundlage für die Softwareauswahl

Diese Examensarbeit wurde mit der Open-Source-Software Latex geschrieben. Latex ist ein stapelorientiertes Textverarbeitungsprogramm, welches im Gegensatz zu diagonalorientierten Textverarbeitungsprogrammen einen Quelltext für die Umsetzung in die fertige Form braucht.

Die Vorteile von Latex sind in erster Linie die eingebaute mathematische Umgebung, der geringe Speicherplatz und die kostenlose Verwendung. Da diese Examensarbeit viele mathematische Gleichungen enthält, war es unumgänglich Latex zu benutzen.

Für die Umsetzung und Darstellung der logistischen Gleichung wurde das **Computer Algebra System** Maple verwendet. In der Ausbildung der Lehramtsstudenten für das Fach Mathematik bildet Maple eine zentrale Rolle und ist ein wichtiger Bestandteil in den Seminaren und Praktika der numerischen Mathematik. Dieser Umgang mit Maple war letztendlich auch der Grund für die Nutzung dieses Programmes.

2 Verwendete Grundbegriffe in der Examensarbeit

In diesem Kapitel werden einige Grundbegriffe, welche in der Arbeit verwendet werden, definiert. In den weiteren Kapitel sind diese Begriffe stets Fett im Text herausgestellt.

Attraktor Der Attraktor (von lat. ad trahere = zu sich hin ziehen) bezeichnet in **dynamischen Systemen** einen stabilen **Fixpunkt**. Der Attraktor zieht benachbarte **Trajektorien** an.

Bifurkation Die Bifurkation (von lat. bi = zweifach und furca = Gabel) bezeichnet in einem nichtlinearen **dynamischen System** eine qualitative Veränderung der Zustände in Abhängigkeit eines Parameters.

Computer Algebra System (CAS) Ein Computer Algebra System ist ein Programm mit dessen Hilfe algebraische Ausdrücke bearbeitet werden können. Im Gegensatz zu einem Taschenrechner können auch symbolische Ausdrücke verarbeitet werden.

Deterministisches Chaos Das deterministische Chaos beschreibt Systeme, bei denen zeitliche Vorhersagen nicht möglich sind. Die Systemgleichungen sind jedoch berechenbar.

Dissipative Systeme Dissipative Systeme geben Energie nach außen ab. Dies geschieht zum Beispiel durch Reibung. Typische Beispiele stammen aus der klassischen Mechanik, somit in all denen Systemen, in denen eine Zerstreuung der Energie stattfindet.

Diskrete Abbildungen Im Gegensatz zu kontinuierlichen Abbildungen, sind diskrete Abbildungen abzählbar und nicht stetig. Ihr Definitionsbereich ist somit eingeschränkt. Die Abstände der Urbilder sind gleich.

Dynamische Systeme Dynamische Systeme sind mathematische Modelle, welche von der Zeit abhängige Entwicklungen beschreiben.

Fixpunkt Der Fixpunkt oder auch kritischer Punkt bezeichnet einen Zustand im **Phasenraum**, welcher invariant gegenüber der Dynamik des Systems ist. Er ist ein Punkt, der sich im Laufe der Zeit nicht mehr verändert.

Iteration Die Iteration (von lat. iterare = wiederholen) ist ein Verfahren aus der Numerischen Mathematik, welches sich Schritt für Schritt dem richtigen Ergebnis nähert.

Kausalität Die Kausalität (von lat. causa = Ursache) beschreibt, wie sehr eine Wirkung von ihrer Ursache abhängt. Es wird zwischen schwacher und starker Kausalität unterschieden.

Aus schwacher Kausalität folgt: gleiche Ursache hat stets gleiche Wirkung. Starke Kausalität bedeutet, dass kleine Änderungen der Ursache auch nur kleine Änderungen der Wirkung zur Folge haben.

Kettenregel Die Kettenregel ist ein Hilfsmittel aus der Analysis mit deren Hilfe die Ableitung für verketteten Funktionen gebildet werden kann. Die Kettenregel in mathematischer Form:

$$f(x) = f[g(x)] \quad (2.1)$$

Mithilfe der Substitution für $g(x) = u$ lautet die Ableitung:

$$f'(x) = \frac{\delta f(u)}{\delta u} * \frac{\delta g(x)}{\delta x} = f'(u) * g'(x) \quad (2.2)$$

Konservative Systeme In einem konservativen System bleibt die Energie über die Zeit gesehen konstant. Beispiele sind Systeme der Mechanik, welche ohne Reibung funktionieren oder elektrische Schaltkreise ohne Widerstand.

Lineare und nichtlineare Systeme Betrachtet werden lineare und nichtlineare Systeme. Ein lineares System wird durch eine bestimmte Proportionalität charakterisiert. Die Ursache eines solchen Systems ist somit proportional zu seiner Wirkung. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von starker **Kausalität**. Ein Beispiel hierfür wäre das Pendel. Hier steht die Rückstellkraft (als Ursache) der Auslenkung (als Wirkung) proportional gegenüber. Darstellungen solcher Systeme bilden im Phasenraum Orbits¹ bei **konservativen Systemen** oder **Attraktoren** bei **dissipativen Systemen**. Auf das Pendel betrachtet spricht man bei einem konservativen System von einem Pendel, welches durch Reibung Energie in Form von Wärme verliert. Im Gegensatz dazu stehen nichtlineare Systeme. Bei diesen Systemen sind Ursache und Wirkung nicht proportional miteinander verknüpft. In den nichtlinearen Systemen wird die starke **Kausalität** in der Regel immer verletzt.

¹vgl. Kap. 2 Grundbegriffe Trajektorien

Phasenraum Der Phasen- oder Zustandsraum stellt alle möglichen Zustände eines **dynamischen Systems** dar. Ein Zustand wird als die Kombination sämtlicher Werte der Variablen und Parameter zu einem bestimmten Zeitpunkt beschrieben. Die **Trajektorien** zeigen das Zeitverhalten des **dynamischen Systems**.

Population Die Population ist die Anzahl einer bestimmten Art von Lebewesen in Abhängigkeit vom Ort und der Zeit.

Repeller Der Repeller (von lateinisch repellere = zurückstoßen) bezeichnet in **dynamischen Systemen** einen instabilen **Fixpunkt**.

Trajektorien Trajektorien sind kreuzungsfreie Kurven im Phasenraum, welche durch die Punkte der Zustände vom Startwert beginnend die zeitliche Entwicklung eines **dynamischen Systems** bestimmen. Geschlossene Trajektorien nennt man Orbits.

3 Die logistische Gleichung

Betrachtet wird ein abgeschlossener See zu einem Zeitpunkt $t = 0$, in dem es eine bestimmte Population an Raubfischen gibt. Die Grundlage für das Existieren der Raubfische bilden die Friedfische, welche den Raubfischen als Nahrung dienen. Da die Raubfische keine natürlichen Feinde besitzen, hängt ihre Population nur vom Nahrungsangebot ab. Ist das Nahrungsangebot hoch, so vergrößert sich die Population der Raubfische mit der Zeit. Ab einem gewissen Zeitpunkt, wird jedoch das Nahrungsangebot kleiner, da von außen keine neue Nahrung dazukommt. Die Population der Raubfische wird vorerst stagnieren, bevor sie sich dann verkleinert. Die Anzahl der Raubfische und Friedfische sind miteinander verkoppelt. Man spricht auch von einer Rückkopplung der Population der Raubfische bezogen auf die Population der Friedfische. Ohne den Sachverhalt der Rückkopplung zu berücksichtigen, kann man die Population der Raubfische mathematisch ausdrücken durch folgende rekursive Darstellung:

$$A_{n+1} = k * A_n \quad (3.1)$$

Der Ausdruck A_n steht für die Anzahl der Raubfische zum Zeitpunkt n . Der Parameter k steht für die Wachstumsrate. Wird die Population größer, so ist $k > 1$, wird die Population kleiner so ist $k < 1$. Einen Spezialfall haben wir für $k = 1$. Die Anzahl der Raubfische würde stagnieren und das System befindet sich in einem Gleichgewicht. Mit der Zeit gesehen verändert sich also die Wachstumsrate. Um unterschiedlich große Systeme miteinander zu vergleichen, ist es hilfreich mit relativen Populationszahlen zu arbeiten. Hier gehen wir von einer maximalen Anzahl von Raubfischen aus, die in dem See leben können. Die relative Anzahl der Individuen ergibt sich dann als Quotient aus der Anzahl der Raubfische zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = n + 1$ und der maximalen Anzahl.

$$x_n = \frac{A_n}{A_{max}} \quad (3.2)$$

Daraus folgt für das exponentielle Wachstum:

$$x_{n+1} = kx_n \quad (3.3)$$

Die explizite Darstellung lautet:

$$x_n = k^n x_1 \quad (3.4)$$

Das Problem solcher Wachstumsprozesse besteht also in der Variabilität des Wachstumsfaktors. Wird diese Variabilität nicht berücksichtigt, so würde der See zu einem Zeitpunkt $t = n + 1$ überfüllt sein mit Raubfischen, welches weit entfernt der Realität wäre. Für diesen Fall benötigte das System eine Art „Bremse“. Im Falle des Sees ist dieses die Anzahl der Friedfische.

Ein anderer extremer Fall stellt das totale Aussterben der Raubfische dar. Um dieses zu verhindern, bräuchte das System eine Art „Beschleuniger“. Im obigen Beispiel ist es die Vermehrung der Raubfische.

3.1 Die Verhulst-Gleichung

Der belgische Mathematiker Pierre-François Verhulst (*28.10.1804, † 15. Februar 1849), welcher sich sehr für stochastische Phänomene begeisterte, veröffentlichte 1845 eine Arbeit, in der er ein Demographisches Model beschreibt. Durch eine einfache, aber dennoch herausragende Idee, schaffte es Verhulst, eine Rückkopplung in das System einzubauen. Wie bereits beschrieben verändert sich die Wachstumsrate k für bestimmte relative Populationen x_n . Verhulsts Idee war es nun, den Wachstumsfaktor in Proportionalität zu der relativen Population zu setzen. Mathematisch ausgedrückt mit folgenden Term:

$$k \sim (1 - x_n) \quad (3.5)$$

Um eine Gleichung zu erhalten, benötigte Verhulst einen Proportionalitätsfaktor. Dieser Proportionalitätsfaktor wird in Verhulsts demographischen Modell als Artspezifische Fortpflanzungsrate bezeichnet.

$$k = r(1 - x_n) \quad (3.6)$$

Nach dem Einsetzen in die rekursive Gleichung 3.3 erhalten wir die logistische Gleichung.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{r}\mathbf{x}_n(1 - \mathbf{x}_n) ; \mathbf{x} \in [0, 1] ; \mathbf{r} \in [0, 4]^1 \quad (3.7)$$

Nach dem Auflösen der Klammern entsteht der folgende Ausdruck:

$$x_{n+1} = rx_n - rx_n^2 \quad (3.8)$$

¹Im Original benutzte Verhulst eine andere Formel, welche sich aber durch Umformung in die hier betrachtete umwandeln lässt.

Die logistische Gleichung besteht somit aus einem linearen zunehmenden und einem quadratischen hemmenden Term. Die Nichtlinearität folgt aus dem quadratischen Term.

3.2 Eigenschaften der logistischen Gleichung

Die logistische Gleichung ist eine **diskrete**, nichtlineare Abbildung, welche vorerst sehr einfach erscheint. Sie dient hervorragend dazu, die Dynamik nichtlinearer Systeme zu beschreiben. Steht n für die Anzahl von Zeitintervallen, so ist die logistische Abbildung sogar **zeitdiskret**.

3.2.1 Der Rückkopplungsterm

Wie mit der Gleichung 3.5 beschrieben, hatte Verhulst eine Art Rückkopplungsmechanismus $(1 - x_n)$ in seine Gleichung eingebaut. Um zu verstehen, wie dieser Term die Gleichung beeinflusst, werden nun die Fälle für sehr kleine und sehr große Populationen untersucht.

Für sehr kleine Populationen gilt:

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} rx_n(1 - x_n) \quad (3.9)$$

Das Grenzwertverhalten für $(1 - x_n)$:

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} (1 - x_n) = 1 \quad (3.10)$$

Die logistische Gleichung erfährt ein exponentielles Wachstum. Die Population erhöht sich sehr schnell.

Für sehr große Population gilt:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} rx_n(1 - x_n) \quad (3.11)$$

Das Grenzwertverhalten für $(1 - x_n)$:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} (1 - x_n) = 0 \quad (3.12)$$

Die Population verkleinert sich sehr schnell.

Bei der Betrachtung der beiden Faktoren x_n und $(1 - x_n)$ ist eine gewisse Rivalität der beiden zu erkennen. Nimmt der eine Faktor zu, so nimmt der andere ab. Desto höher der Kontrollparameter r , desto schneller reagiert das System auf Veränderungen.

3.2.2 Der Kontrollparameterbereich

Für eine erste Betrachtung der logistischen Gleichung wird diese gespalten und die beiden Funktionen

$$f_1(x) = x \quad (3.13)$$

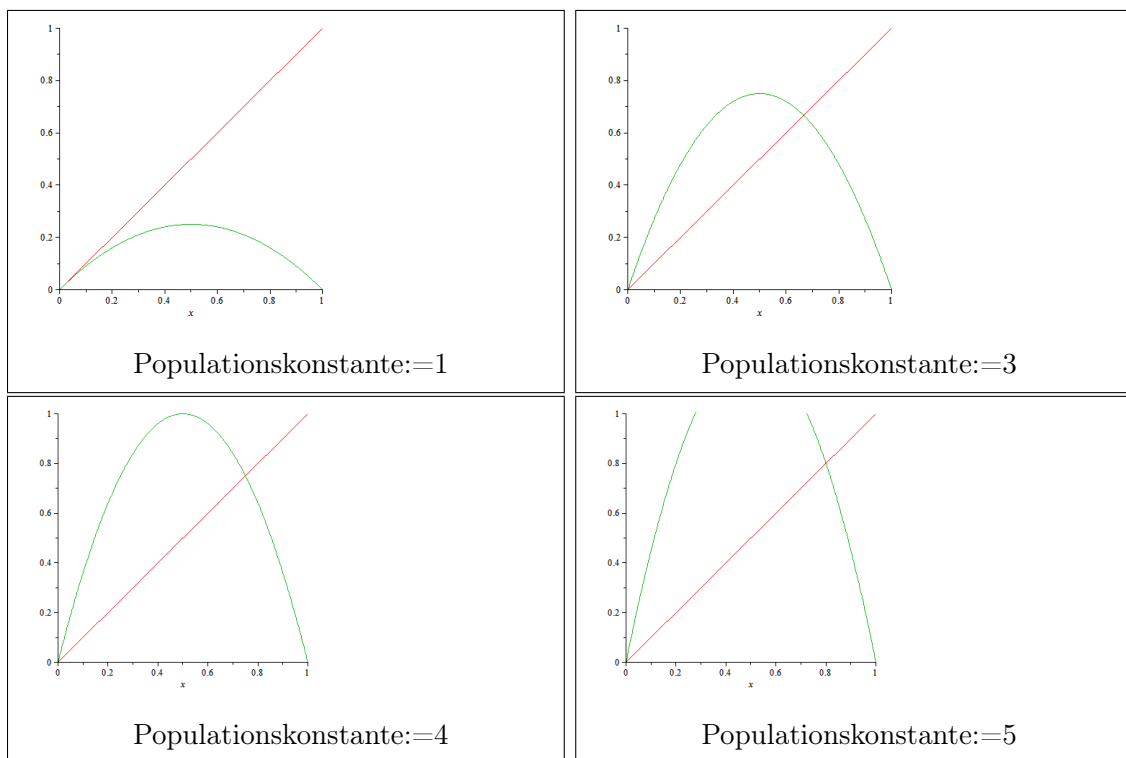
$$f_2(x) = rx(1 - x) \quad (3.14)$$

mithilfe von Maple in einem gemeinsamen Koordinatensystem dargestellt.

```

1 logis := proc (populationskonstante)
2 local f, g, r;
3 r := populationskonstante;
4 f :=x\longrightarrow r*x*(1-x);
5 g :=x\longrightarrow x;
6 plot({f(x), g(x)}, x = 0 .. 1, style = line, view = [0 .. 1, 0 .. 1]);
7 end proc

```



Aus den Schaubildern ist ersichtlich, dass sich der Kontrollparameterbereich r auf $r \in [0, 4]$ beschränkt, da x nach 3.2 sich auf $x \in [0, 1]$ begrenzt. Für $r = 4$ ist im Schaubild eine Selbstabbildung der logistischen Gleichung auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ ersichtlich.

4 Das Zeitverhalten der logistischen Gleichung

Um einen ersten Eindruck zu erhalten, wie sich die logistische Gleichung für verschiedene Startwerte x_0 und Populationskonstanten r verhält, werden diese in einem Diagramm dargestellt. Auf der Abszisse befindet sich die Anzahl der Iterationsschritte und auf der Ordinate die zu diesem Schritt gehörige relative Population.

4.1 Der Quellcode für das Zeitverhalten

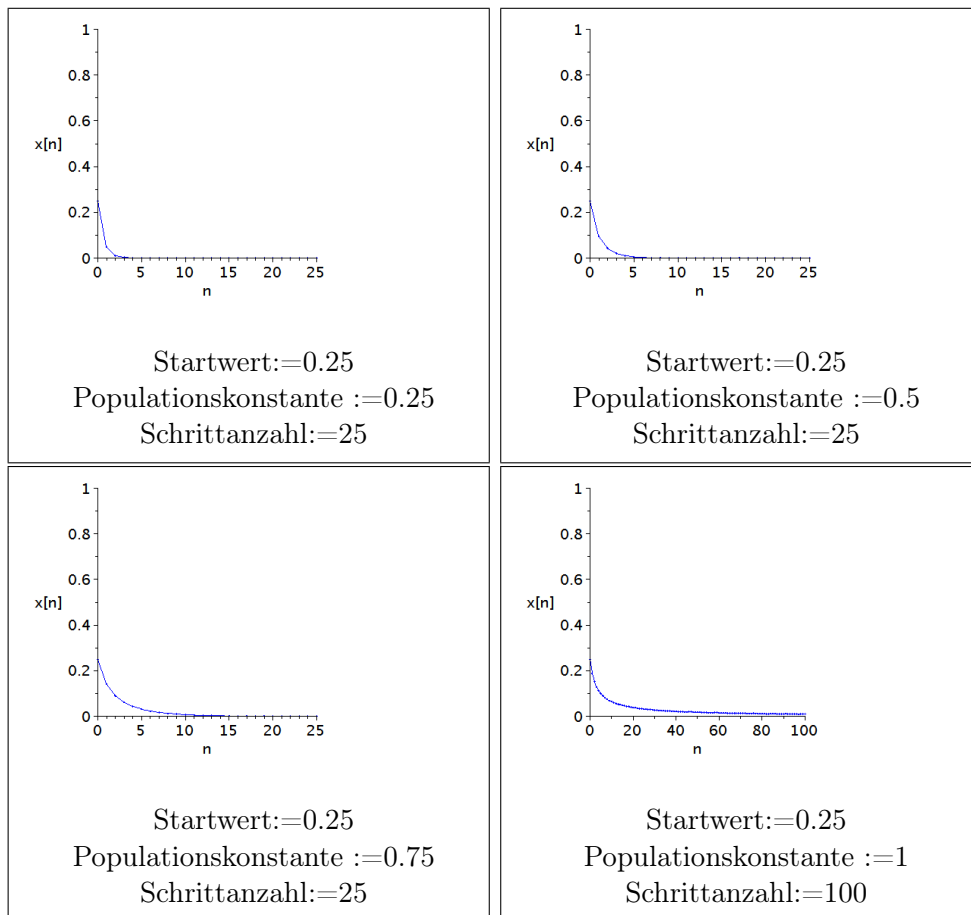
Für die graphische Umsetzung des Zeitverhaltens der logistischen Gleichung wurde das **Computer Algebra System** Maple verwendet. Um Funktionen oder Gleichungen darstellen zu lassen, benötigt man das Paket „plots“, in dem die Befehle für die graphische Veranschaulichung vorhanden sind. Die Prozedur „zeitverhalten“ wird mit der Übergabe der drei Parameter „startwert“, „populationskonstante“ und „schritttanzahl“ gestartet. Im nächsten Schritt werden die lokalen Variablen definiert, welchen keine Datentypen zugeordnet werden. Der Variablen „liste“ wird ein zweidimensionales Feld zugeordnet, die später dann die Abszissen- und Ordinatenwerte aufnehmen soll. Die Schleife wird der Schrittzahl entsprechend oft durchlaufen. In der Schleife wird zuerst x ein neuer Wert übergeben, welcher in Abhängigkeit mit dem alten x -Wert entsteht. Dieser wird dann im nächsten Schritt mit dem Schrittwert zusammen in die Liste geschrieben. Nach Beendigung der Schleife wird die Liste graphisch ausgegeben und es entstehen die dazugehörigen Schaubilder.

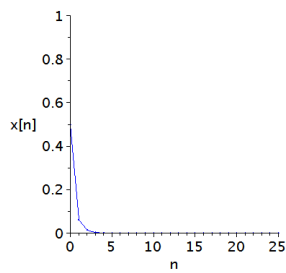
```
1 > with(plots);
2 > zeitverhalten := proc (startwert, populationskonstante, schritttanzahl)
3   local k, x, r, liste;
4   liste := [[0, startwert]];
5   x := startwert;
6   r := populationskonstante;
7   for k to schritttanzahl do
8       x := r*x*(1-x);
9       liste := [op(liste), [k, evalf(x, 4)]]
10  end do;
11  plot(liste, style = line, view = [0 .. schritttanzahl, 0 .. 1])
12 end proc;
```

4.2 Darstellung des Zeitverhaltens für Startwert $x_0 \in [0, 1]$ und Populationskonstanten $r \in [0, 1]$

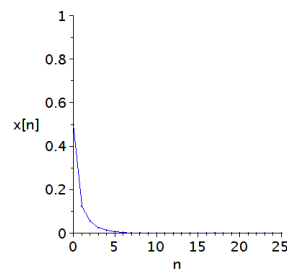
Anhand der Graphiken wird sichtbar, dass die logistische Gleichung bei einer Populationskonstanten $r \leq 1$ gegen Null strebt. Die Startwerte können dieses Aussterben nur verzögern oder beschleunigen, es aber nicht aufhalten. Auf das demographische Modell bezogen, stirbt die Population aus.

Einen Spezialfall bildet die Populationskonstante $r = 1$, bei der es unendlich lange dauert bis die Population ausgestorben ist. Für den Startwert $x = 0$ gilt der Fall, dass nichts entstehen kann, da nichts vorhanden ist. Für den Fall, dass der Startwert $x = 1$, ist folgt die Auslöschung direkt nach dem ersten Schritt, welches auf die Gleichung zurückzuführen ist, da der Term $(1 - x)$ bei $x = 1$ Null wird.

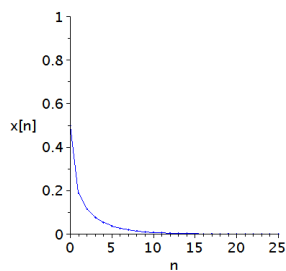




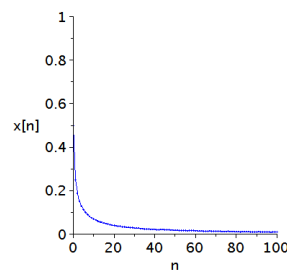
Startwert:=0.5
Populationskonstante :=0.25
Schrittzahl:=25



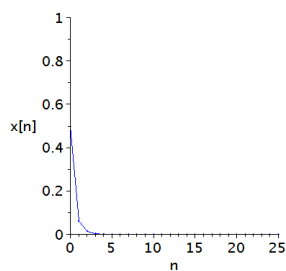
Startwert:=0.5
Populationskonstante :=0.5
Schrittzahl:=25



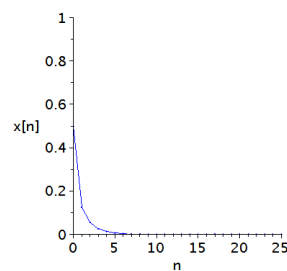
Startwert:=0.5
Populationskonstante :=0.75
Schrittzahl:=25



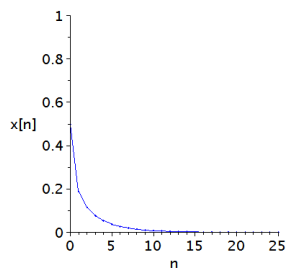
Startwert:=0.5
Populationskonstante :=1
Schrittzahl:=100



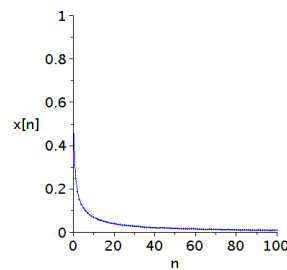
Startwert:=0.75
Populationskonstante :=0.25
Schrittzahl:=25



Startwert:=0.75
Populationskonstante :=0.5
Schrittzahl:=25



Startwert:=0.75
Populationskonstante :=0.75
Schrittzahl:=25



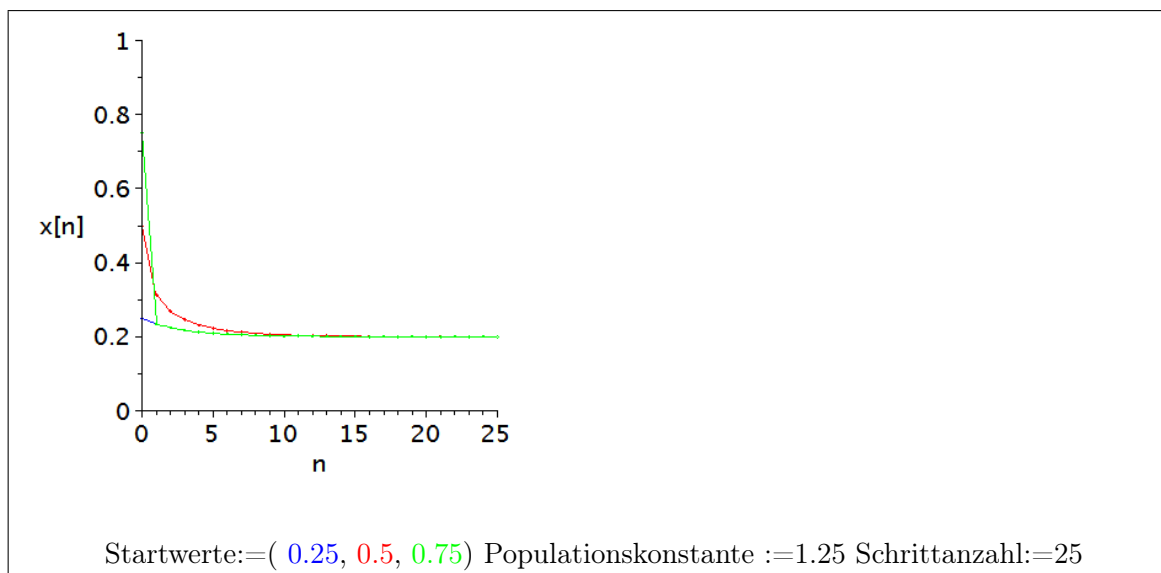
Startwert:=0.75
Populationskonstante :=1
Schrittzahl:=100

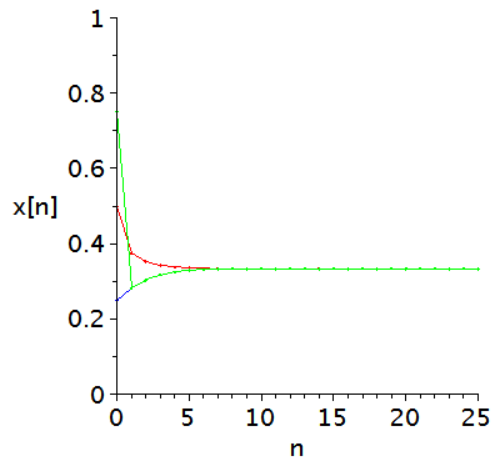
4.3 Darstellung des Zeitverhaltens für Startwert $x_0 \in [0, 1]$ und Populationskonstante $r \in [1, 3]$

Um zu zeigen, welche Rolle der Startwert bildet, wurden die Zeitverläufe für verschiedene Startwerte mit gleicher Populationskonstanten in ein Koordinatensystem übereinander gelegt. Dieses kann mithilfe des Befehls `Display` in Maple realisiert werden. Der Befehl `Display` vereinigt die `Plot`-Befehle aus mehreren Prozeduren miteinander und stellt diese in einem einzigen Schaubild dar.

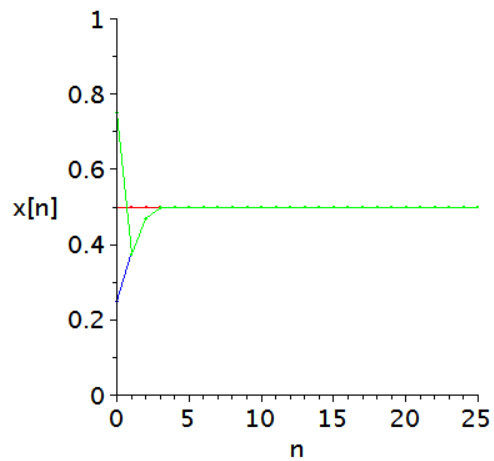
```
1 display([zeitverhalten(),zeitverhalten(),zeitverhalten()])
```

Die Zeitverläufe zeigen nun ein anderes Verhalten als für $r \leq 1$ auf. Die Populationen nähern sich einem bestimmten Wert an, welcher aber stets im Definitionsbereich für $x \in [0, 1]$ bleibt und ungleich Null ist. Je größer die Populationskonstante ist, desto größer ist auch dieser Wert. Man könnte fast von einer direkten Proportionalität zwischen der Populationskonstanten und dem Wert an den sich das System nähert, ausgehen. Diese Vermutung lässt sich nur durch eine analytische Betrachtung beweisen. Die Startwerte spielen wie auch schon für den vorherigen Fall keine Rolle für das System. Die Werte, die das System anstrebt, sind somit invariant gegenüber dem Startwert. Im Falle des demographischen Modells würde die Population eine bestimmte Anzahl an Individuen annehmen und diese Anzahl beibehalten. Es entsteht ein Gleichgewicht zwischen dem Entstehen eines Individuums und dem Verschwinden dieses.

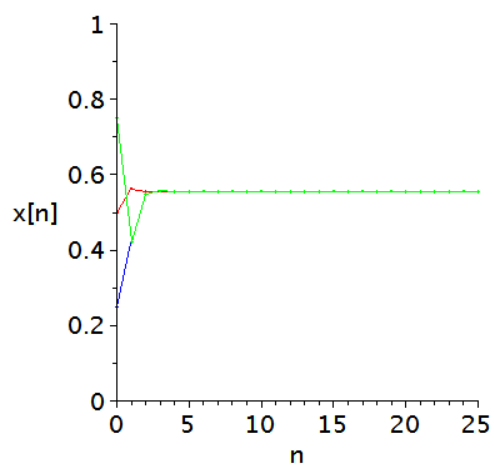




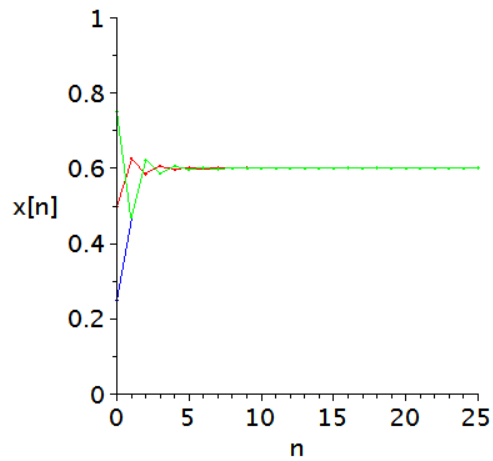
Startwerte:=(0.25, 0.5, 0.75) Populationskonstante :=1.5 Schrittzahl:=25



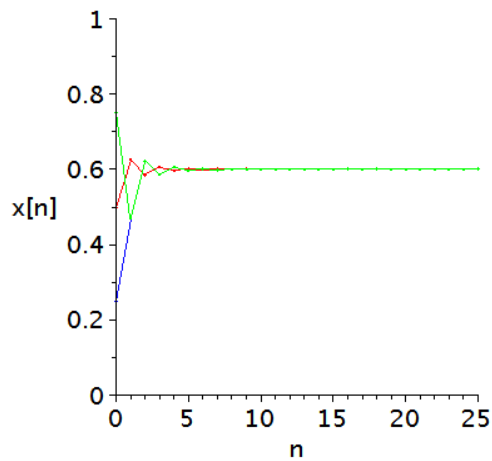
Startwerte:=(0.25, 0.5, 0.75) Populationskonstante :=1.75 Schrittzahl:=25



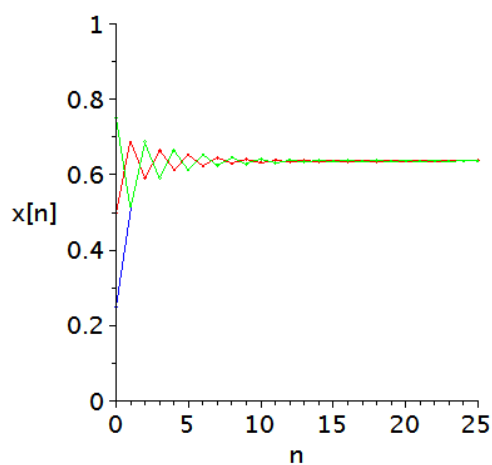
Startwerte:=(0.25, 0.5, 0.75) Populationskonstante :=2 Schrittzahl:=25



Startwerte:=(0.25, 0.5, 0.75) Populationskonstante :=2.25 Schrittzahl:=25

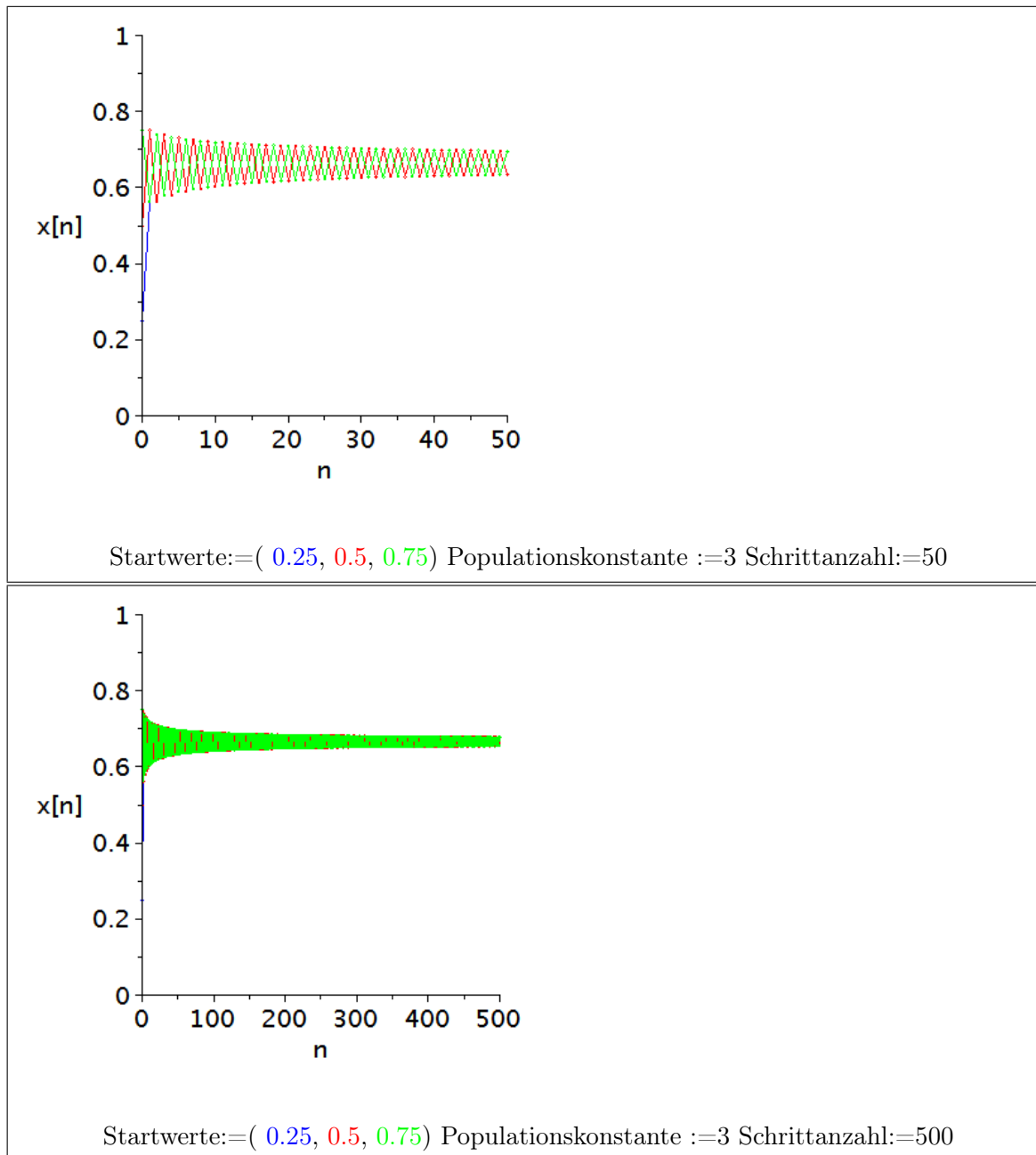


Startwerte:=(0.25, 0.5, 0.75) Populationskonstante :=2.5 Schrittzahl:=25



Startwerte:=(0.25, 0.5, 0.75) Populationskonstante :=2.75 Schrittzahl:=25

Für den Fall $r = 3$ weist das System eine Irregularität auf. Wie schon bei dem behandelten Fall für $r = 1$ braucht das System unendlich lang, um in den Gleichgewichtszustand zu gelangen.

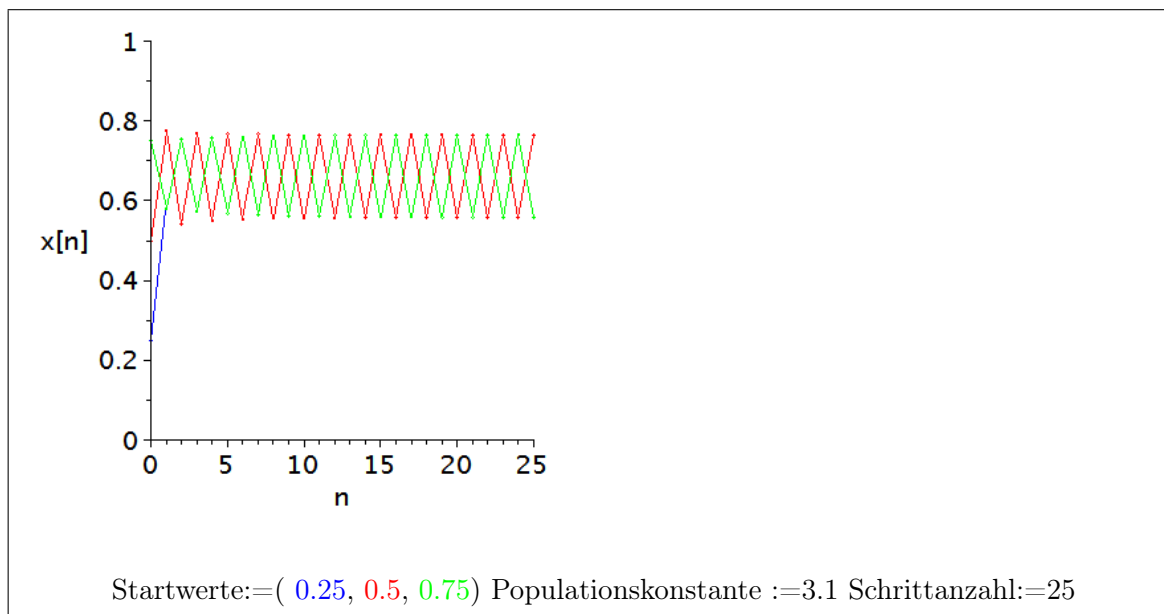


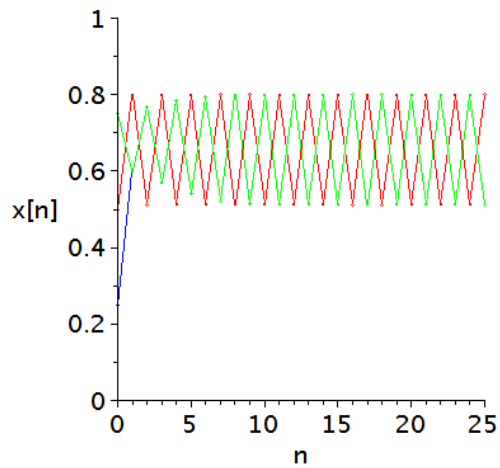
4.4 Darstellung des Zeitverhaltens für Startwert $x_0 \in [0, 1]$ und Populationskonstante $r \in [3, 4]$

Ab einer Populationskonstanten $r > 3$ beginnt das System zu schwingen. Zuvor wurde beobachtet, wie sich das System für $r \leq 3$ einem bestimmten Punkt nähert. Nun sind es mehrere Punkte. Dieses lässt die Annahme auf Zyklenbildung zu.

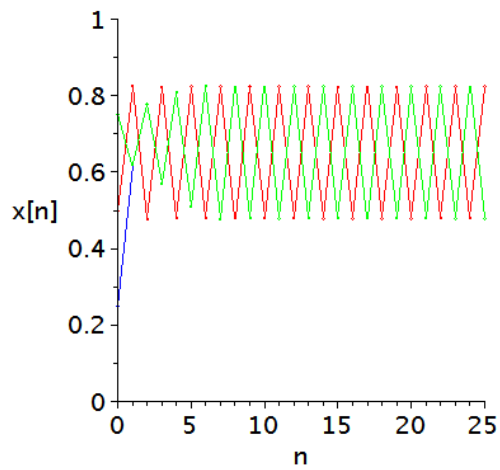
4.4.1 Bildung eines 2-Zyklus

Für die Parameterwerte $3 < r \leq 3.4$ begibt sich das System in einen schwingenden Zustand. Die Populationswerte bewegen sich ab einer gewissen Zeit nur noch zwischen zwei Werten. Die Startwerte erzwingen eine Verschiebung des Systems, jedoch keine qualitative Veränderung dieses. Auf das demographische Modell bezogen, wird es nicht bedeuten, dass die Population umher springt, sondern dass es zwei Möglichkeiten gibt, wie sich das System verhalten kann. Eine Vorhersage kann zu diesem Zeitpunkt nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% getroffen werden.

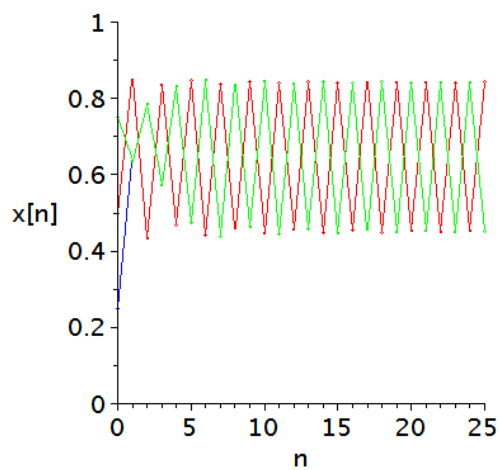




Startwerte:=(0.25, 0.5, 0.75) Populationskonstante :=3.2 Schrittzahl:=25



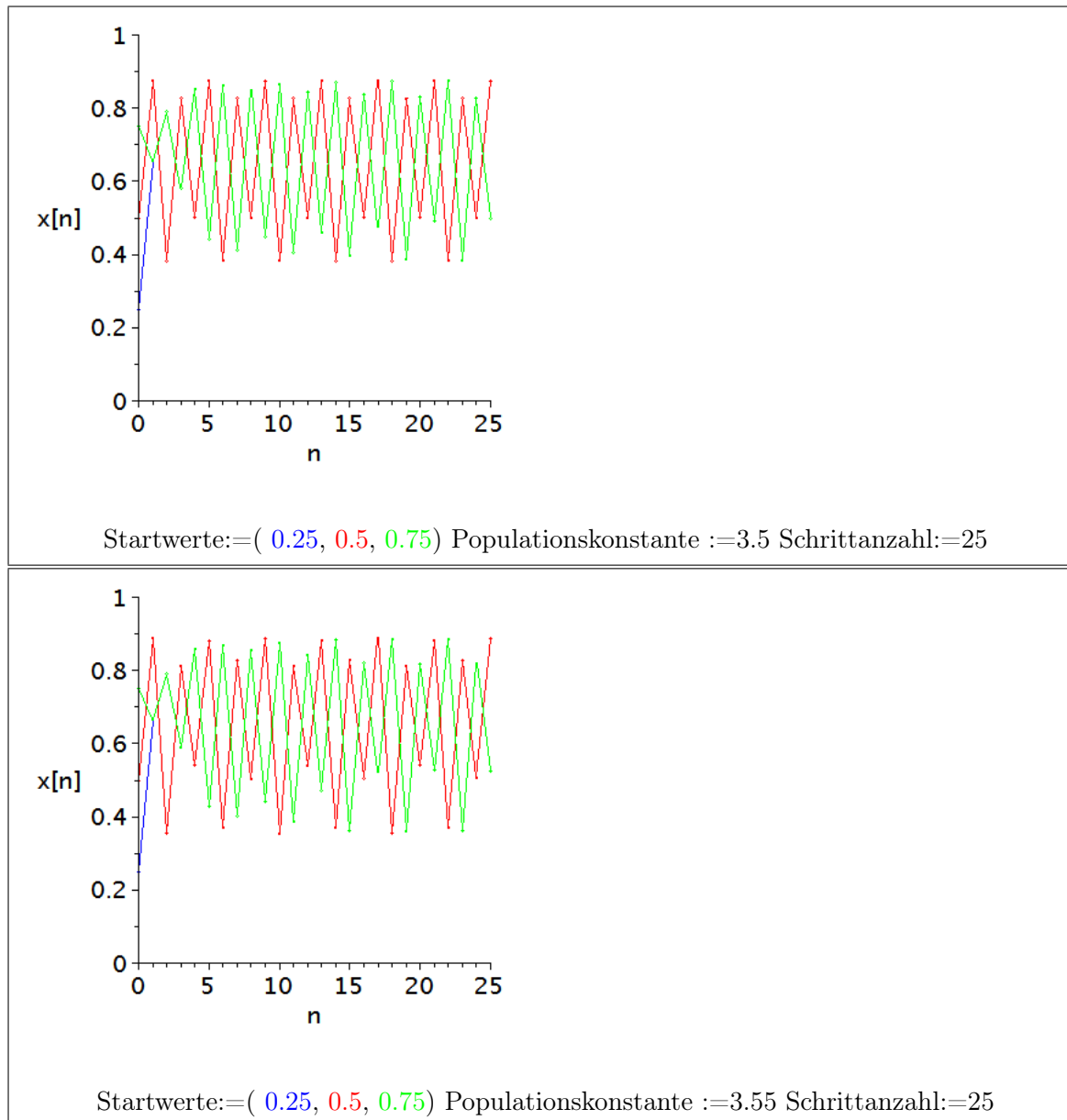
Startwerte:=(0.25, 0.5, 0.75) Populationskonstante :=3.3 Schrittzahl:=25



Startwerte:=(0.25, 0.5, 0.75) Populationskonstante :=3.4 Schrittzahl:=25

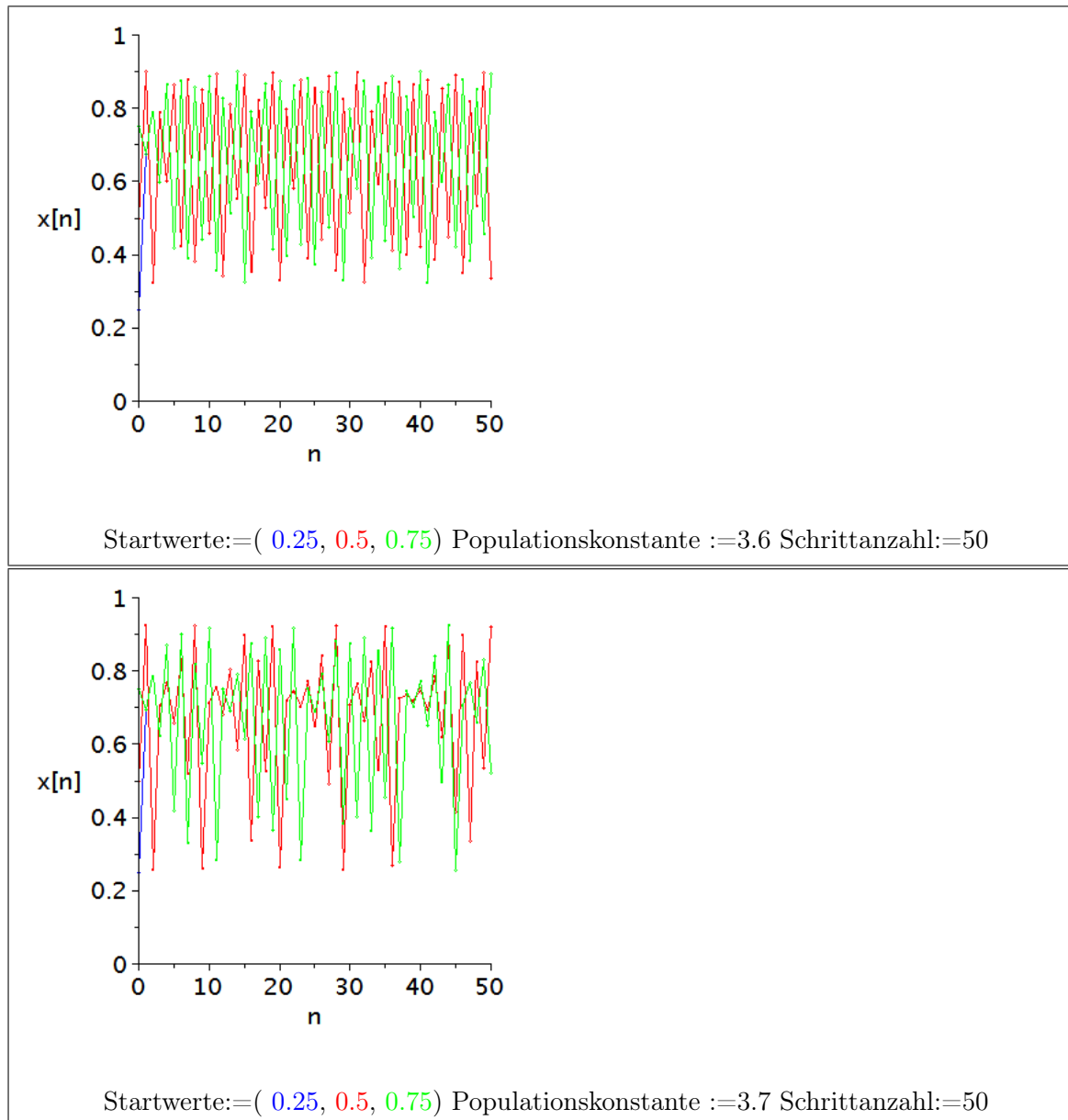
4.4.2 Bildung eines 4-Zyklus

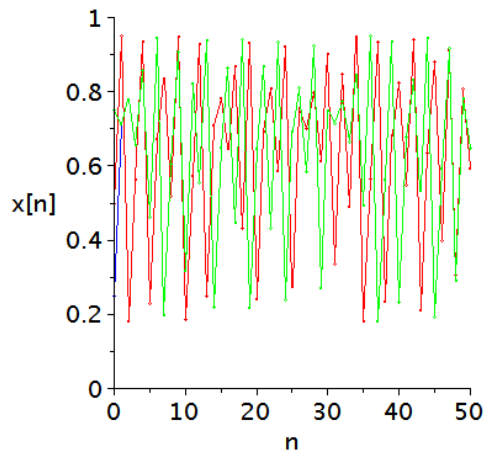
Für $r \geq 3.5$ wird aus dem 2-Zyklus ein 4-Zyklus. Die Startwerte beeinflussen das System wiederum nicht entscheidend.



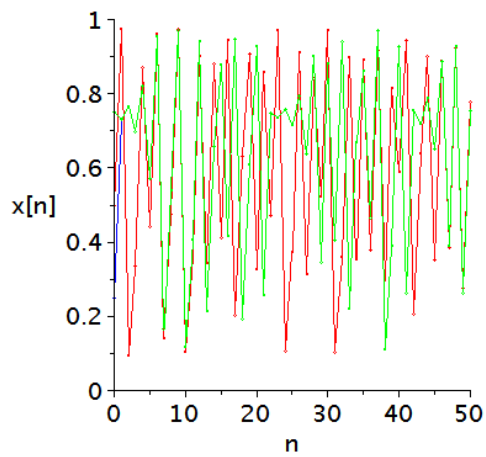
4.4.3 Übergang ins Chaos

Ab einer Populationskonstanten $r \geq 3.6$ verschwinden die Zyklen. Das System verliert seine Ordnung. Das Verhalten des Systems ist nicht mehr invariant gegenüber den Startwerten.

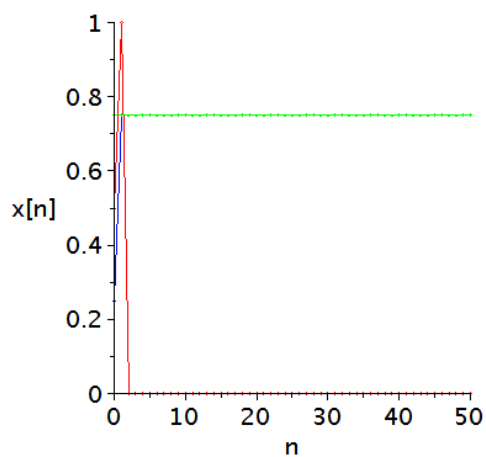




Startwerte:=(0.25, 0.5, 0.75) Populationskonstante :=3.8 Schrittzahl:=50



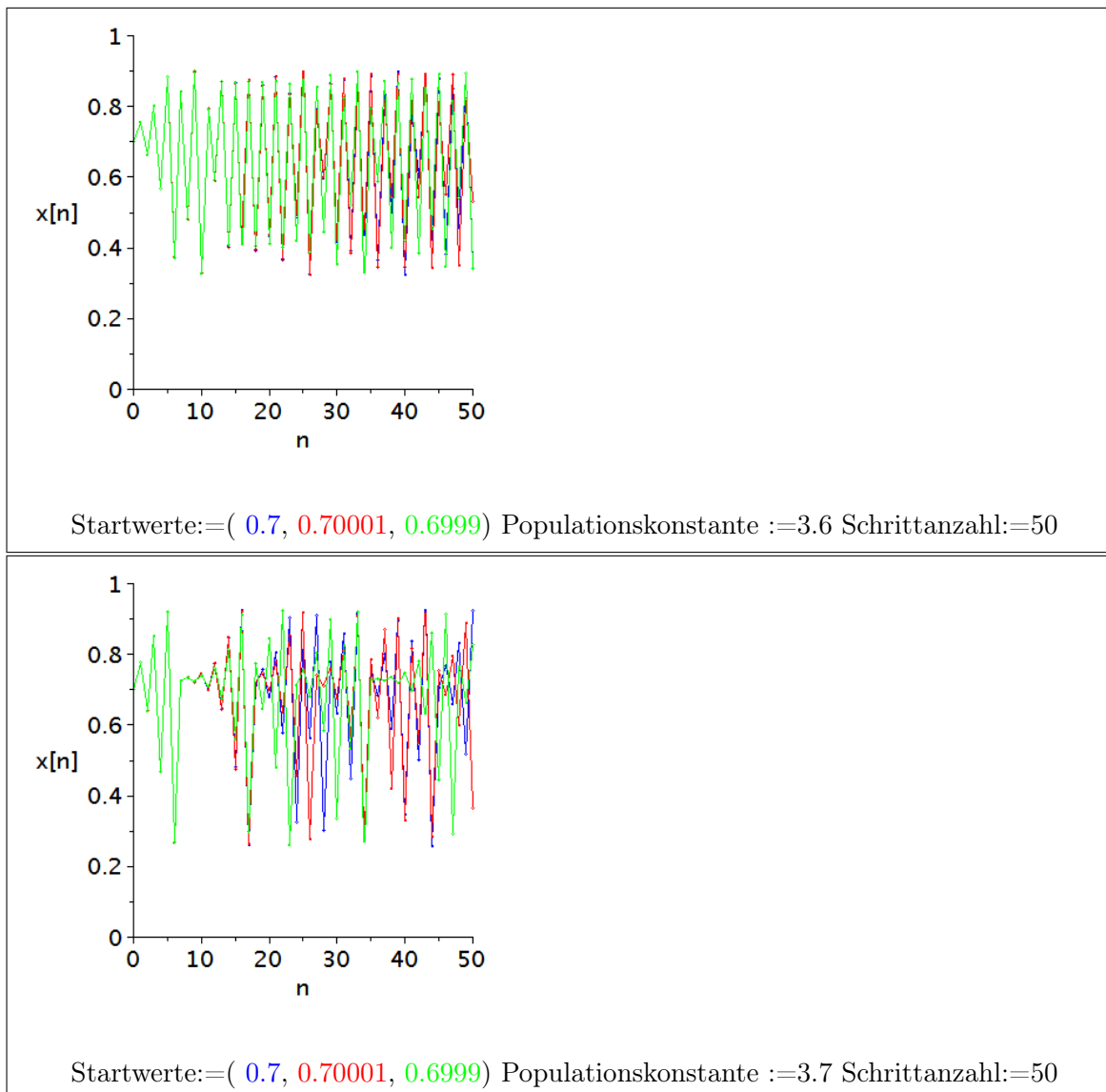
Startwerte:=(0.25, 0.5, 0.75) Populationskonstante :=3.9 Schrittzahl:=50

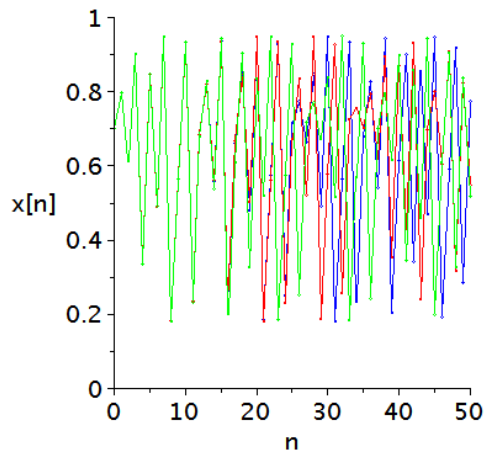


Startwerte:=(0.25, 0.5, 0.75) Populationskonstante :=4 Schrittzahl:=50

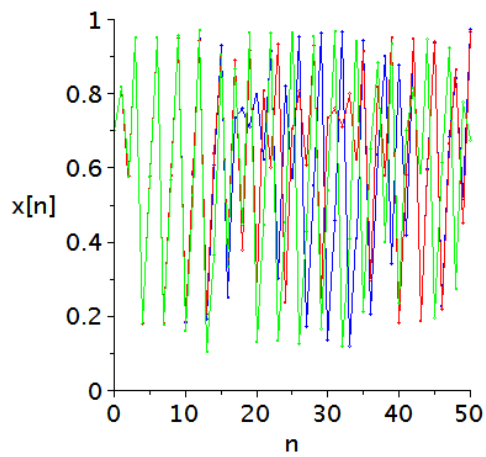
4.4.4 Übergang ins Chaos mit annähernd identischen Startwerten

Bis zu einer Populationskonstanten $r \leq 3.6$ haben die Startwerte den zeitlichen Verlauf des System nur gering oder gar nicht verändert. Für $r \geq 3.6$ gibt es nun qualitative Unterschiede. Um chaotisches Verhalten nachzuweisen, ist es erforderlich, den Systemverlauf in Abhängigkeit seiner Startwerte zu untersuchen. Die Startwerte werden nur minimal verändert. Die entstandenen Schaubilder zeigen, dass sich die Endzustände trotz der fast gleichen Startzustände sehr unterscheiden. Die **Trajektorien** gehen ab einer bestimmten Schrittzahl auseinander. Man nennt dieses Verhalten auch sensitive Abhängigkeit des Systems von ihren Startwerten. Wenn ein System solche Eigenschaften besitzt, ist es chaotisch.

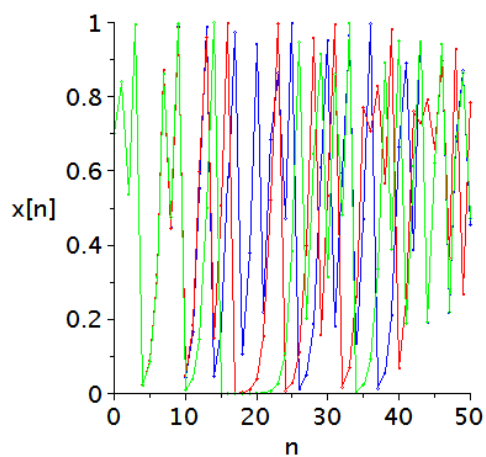




Startwerte:=(0.7, 0.70001, 0.6999) Populationskonstante :=3.8 Schrittzahl:=50



0.7, 0.70001, 0.6999) Populationskonstante :=3.9 Schrittzahl:=50



Startwerte:=(0.7, 0.70001, 0.6999) Populationskonstante :=4 Schrittzahl:=50

5 Das Langzeitverhalten der logistischen Gleichung mithilfe der graphischen Iteration

Im vorangegangenen Kapitel wurde das Zeitverhalten der logistischen Gleichung behandelt und festgestellt, dass sich das System für bestimmte Populationskonstanten einem bestimmten Punkt nähert. Diese Punkte nennt man **Fixpunkte** oder kritische Punkte. Fixpunkte sind im Allgemeinen invariant gegenüber der Dynamik. Das bedeutet, dass sich diese Punkte für $n \rightarrow \infty$ gegenüber dem Zeitverlauf nicht mehr ändern, wenn sie stabil sind. Bei diskreten Systemen kann die Langzeitentwicklung über die Fixpunktiteration erfolgen. Diese Kapitel beschäftigt sich mit der graphischen Umsetzung der Fixpunktiteration.

5.1 Die graphische Fixpunktiteration

Für das Interpretieren von **dynamischen Systemen** kann eine Abbildung deren **Phasenraums** in ein geeignetes Koordinatensystem oft sehr hilfreich sein. Die entstehenden **Trajektorien** im Phasenraum erlauben eine Aussage über die Art und den Verlauf des Systems. Die graphische Fixpunktiteration erfolgt im Fall der logistischen Gleichung im ersten Quadranten. Für die Umsetzung der graphischen Fixpunktiteration werden im ersten Quadranten das Schaubild der logistischen Abbildung für $x \in [0, 1]$ und den Kontrollparameter $r \in [0, 4]$ sowie die Winkelhalbierende des ersten Quadranten benötigt. Die Fixpunktiteration erfolgt in den folgenden Schritten:

1. Der Startwert x_0 wird auf der x-Achse markiert.
2. Von diesem Wert aus wird eine vertikale Linie zum Punkt $P(x_0, x_1)$, welcher sich auf dem Schaubild der logistischen Abbildung befindet, gezogen.
3. Als nächstes wird eine horizontale Linie zum Punkt $P(x_1, x_1)$, welcher sich auf der Winkelhalbierenden befindet, gezogen.
4. Von diesem Punkt auf der Winkelhalbierenden wird nun eine vertikale Linie zum Punkt $P(x_1, x_2)$, welcher sich auf dem Schaubild der logistischen Abbildung befindet, gezogen.

Nach dem vierten Schritt ist eindeutig, dass die graphische Fixpunktiteration stetig zwischen dem Schaubild der logistischen Abbildung und der Winkelhalbierenden abläuft. Dieses wird so lange fortgesetzt, bis sich **Attraktoren** oder **Repeller** bilden.

5.2 Umsetzung der graphischen Fixpunktiteration mithilfe von Maple

Die Maple-Prozedur „fixit“ wird mit den drei Parameterwerten „startwert“, „populationskonstante“ und „schrittanzahl“ übergeben. Der lokalen Variablen „Liste1“ wird ein zweidimensionaler Array übergeben mit dem ersten Eintrag „startwert“ und der Null (siehe dazu 5.1). Als nächstes werden die Winkelhalbierende und das Schaubild der logistischen Abbildung als die Funktionen f und g in Abhängigkeit von z definiert. In der Schleife wird als erstes eine Hilfsliste „liste2“ angelegt, welche identisch mit „liste1“ ist. Im nächsten Schritt wird mithilfe der logistischen Gleichung der Wert x_{n+1} bestimmt und in „liste2“ für den zweiten Wert des Wertepaares eingesetzt. Nun bekommt „liste1“ das Wertepaar von „liste2“ und das Wertepaar x_{n+1} und x_{n+1} . Am Ende der Prozedur werden die Funktionen und die „liste1“ graphisch ausgegeben.

```
1 with(plots);
2 fixit := proc (startwert, populationskonstante, schrittanzahl)
3 local k, x, r, liste1, liste2, f, g;
4 liste1 := [[startwert, 0]];
5 f := z → z;
6 g := z → populationskonstante*z*(1-z) ;
7 f(2);
8 x := startwert;
9 r := populationskonstante;
10 k := 1;
11 for k to schrittanzahl do
12 liste2 := [x, 0];
13 x := r*x*(1-x);
14 liste2[2] := x;
15 liste1 := [op(liste1), liste2];
16 liste1 := [op(liste1), [x, x]]
17 end do;
18 plot({f(z), g(z), liste1}, z = 0 .. 1, style = line, view = [0 .. 1, 0 .. 1])
19 end proc
```

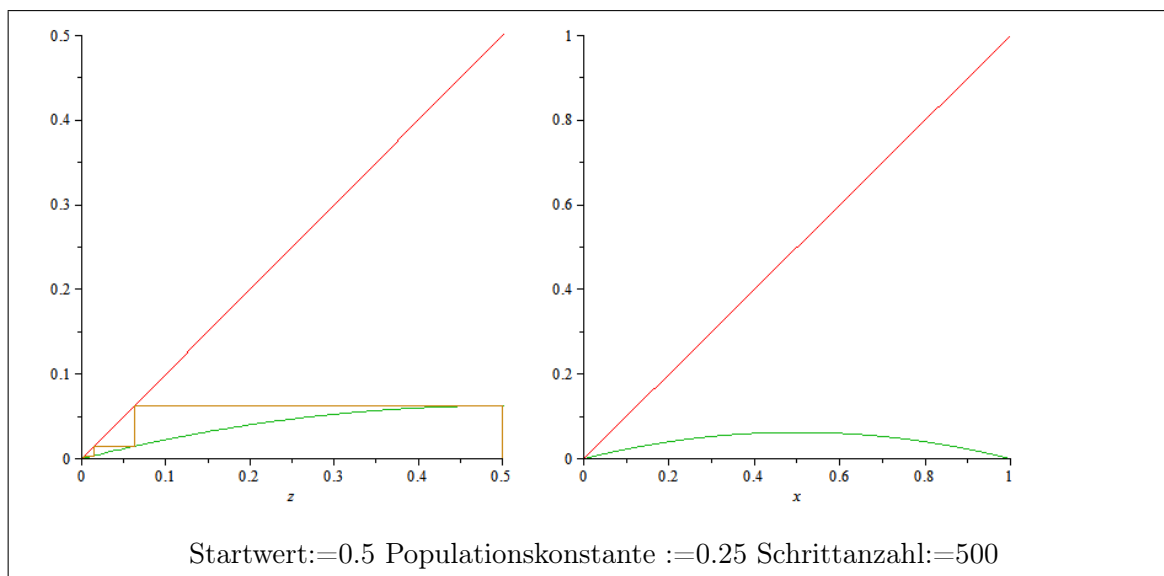
5.3 Die Schaubilder der graphischen Iteration

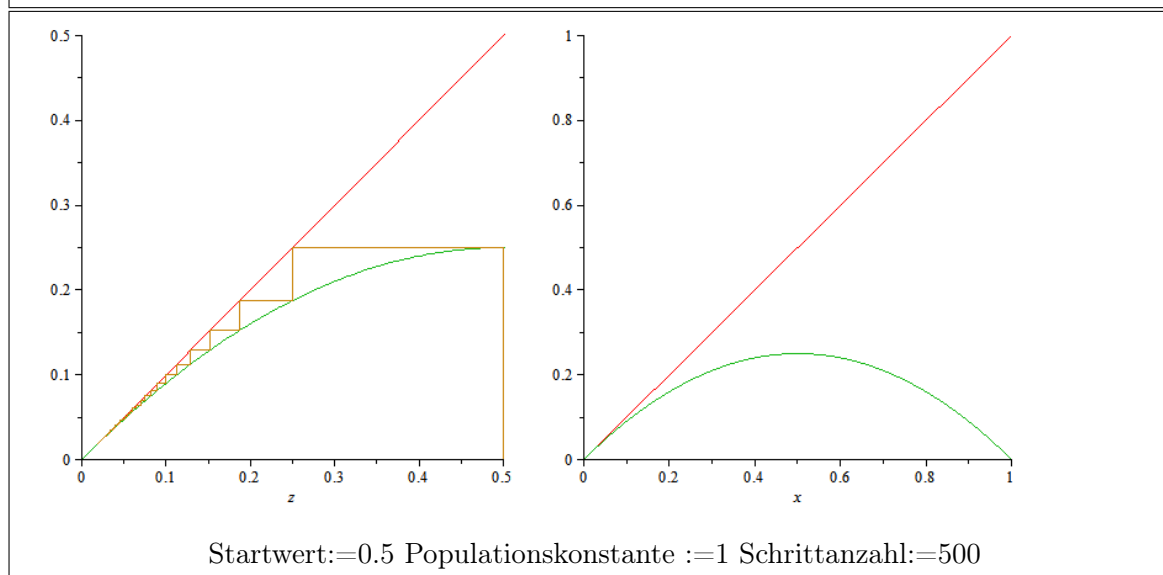
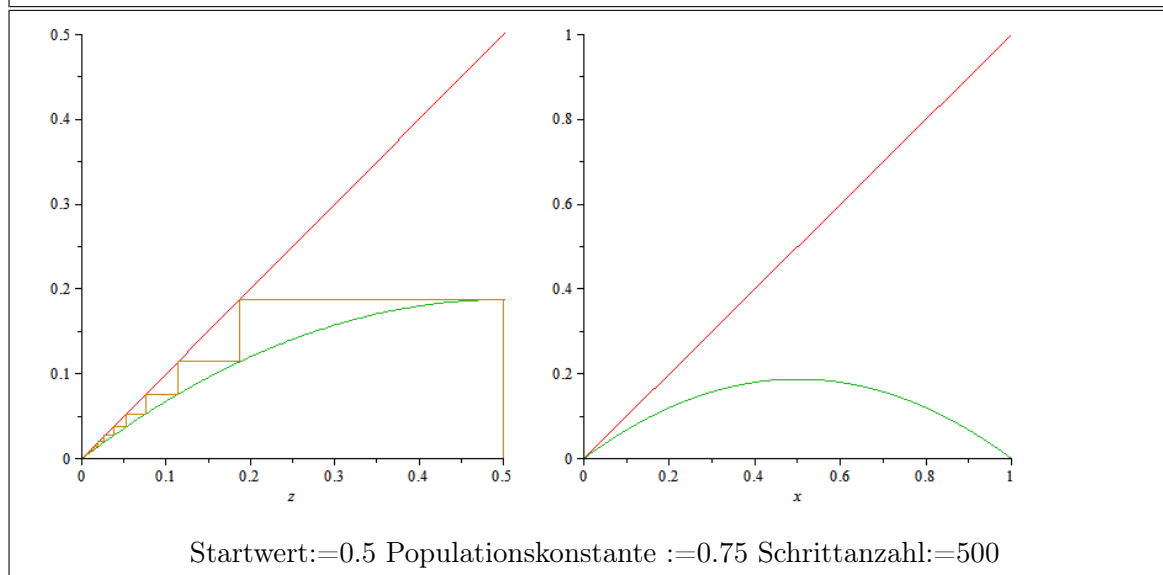
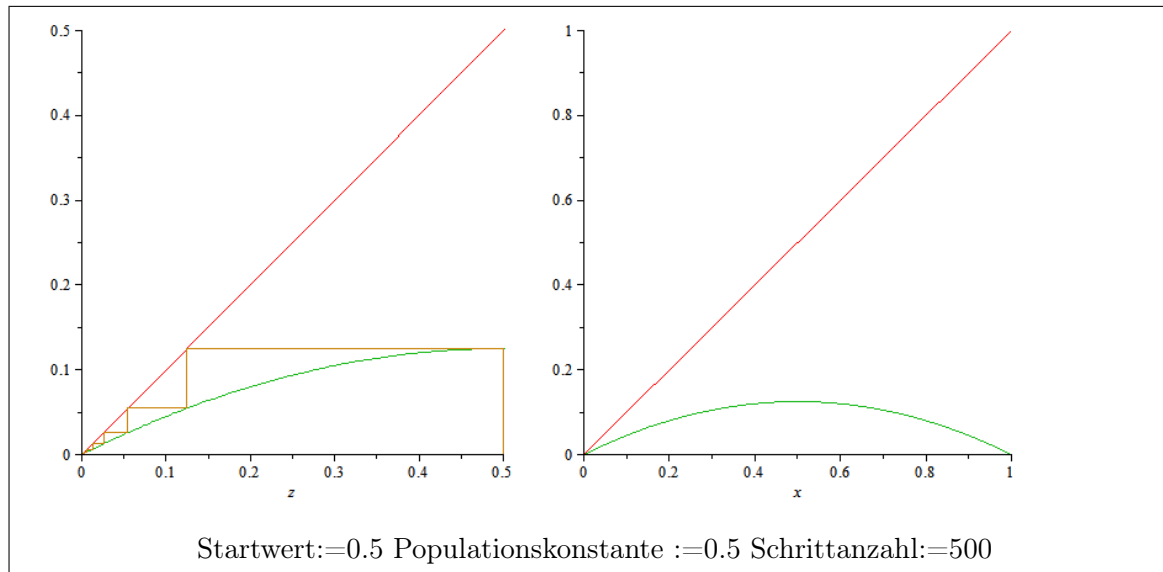
Die Prozedur „fixit“ wurde nun für Kontrollparameter $r \in [0, 4]$ durchgeführt. Für eine bessere Veranschaulichung wurden die Schaubilder der graphischen Iteration den Schaubildern der logistischen Gleichung gegenübergestellt.

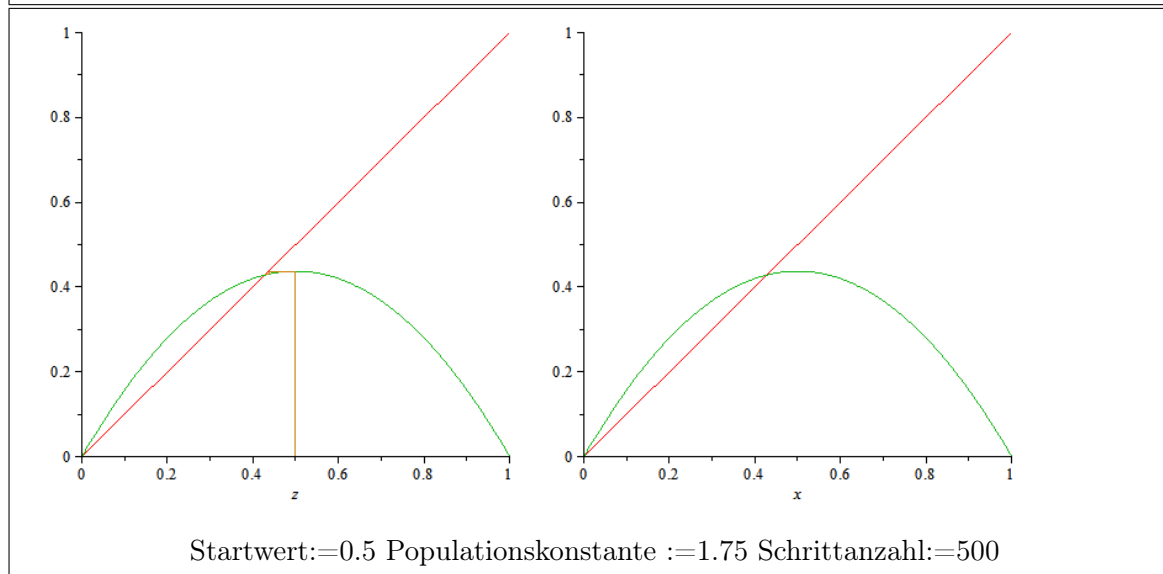
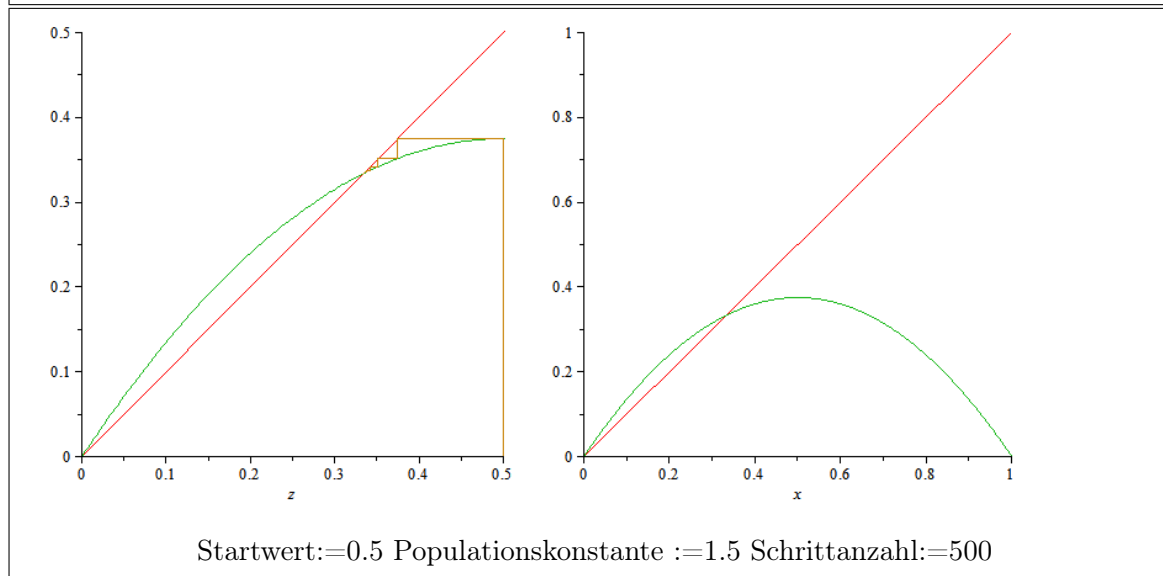
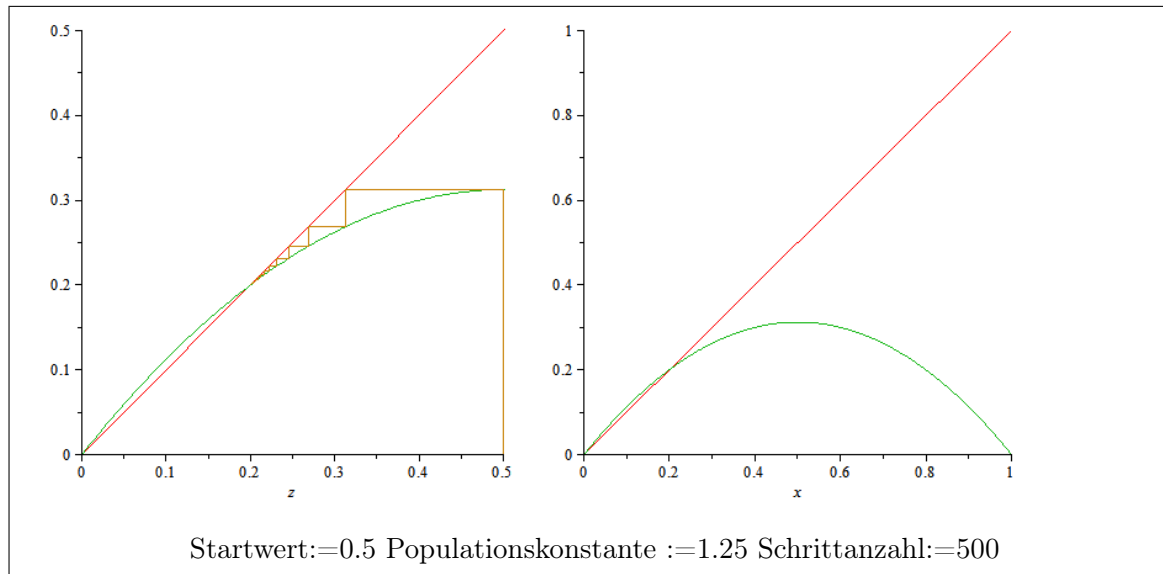
```
1 > restart;
2 with(plots);
3 schnittpunkt := proc (populationskonstante)
4 local f, g, r, h; r := populationskonstante;
5 f := x\rightarrow r*x*(1-x) ;
6 h := x\rightarrow (f@@n)(x);
7 g := x\rightarrow x ;
8 plot({g(x), h(x)}, x = 0 .. 1, style = line, view = [0 .. 1, 0 .. 1])
9 end proc;
```

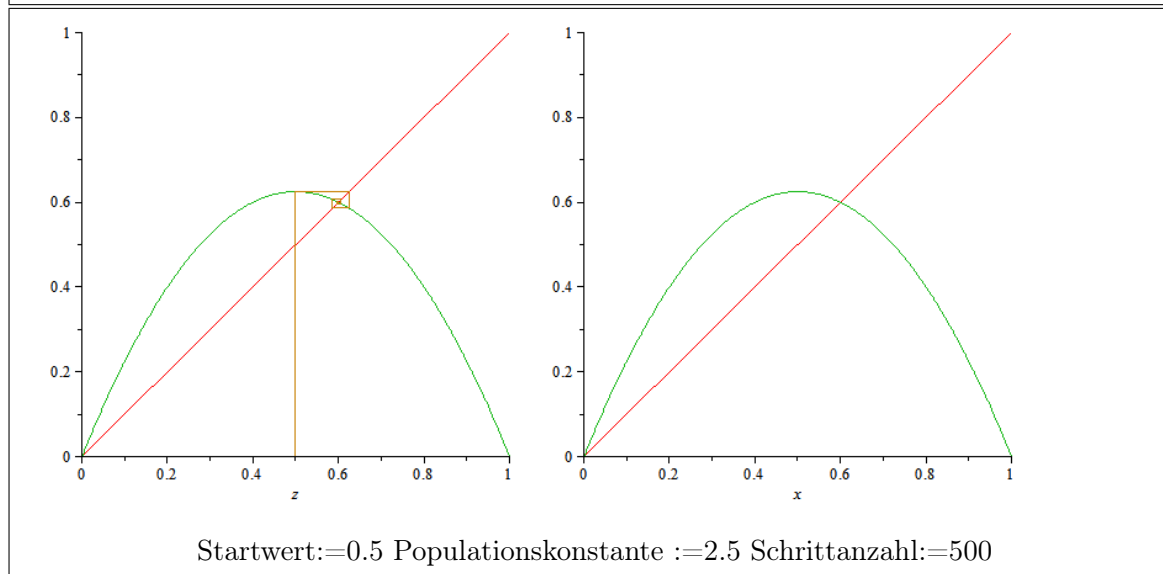
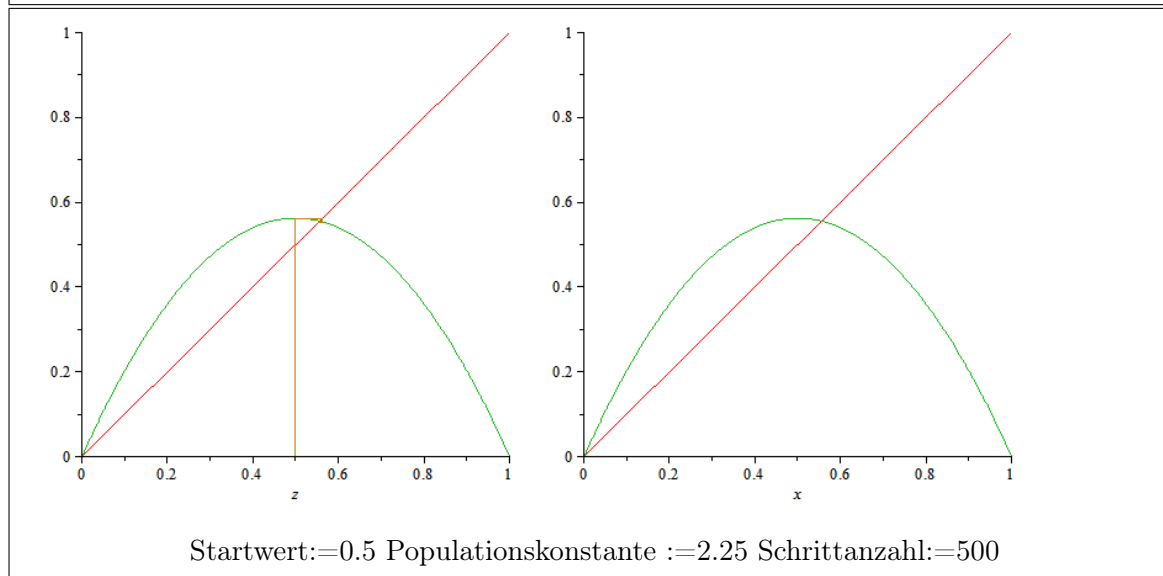
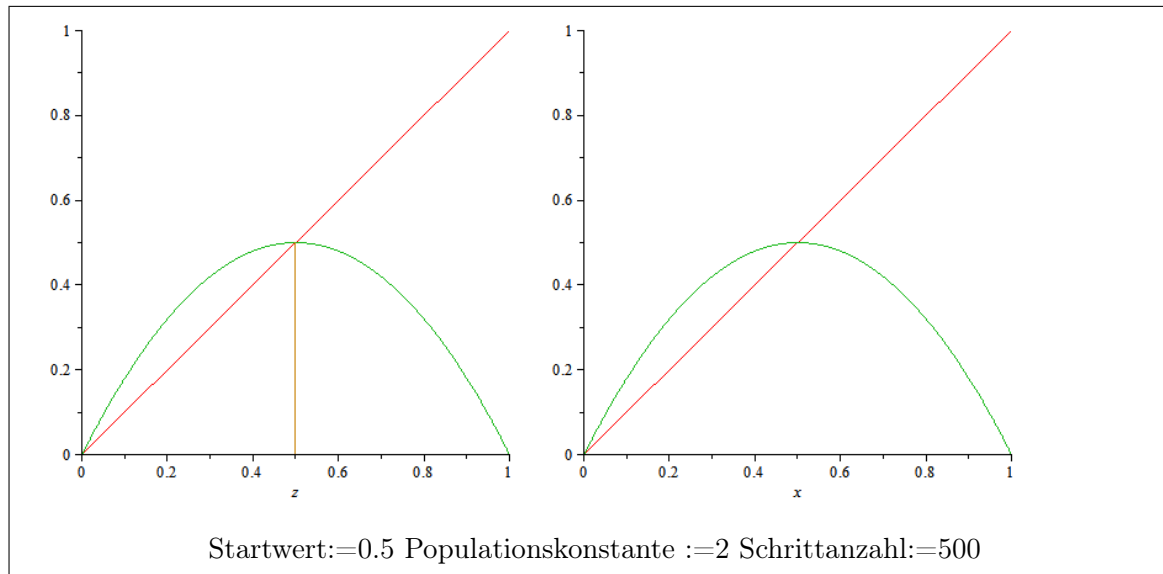
5.3.1 Das Langzeitverhalten für $r \in [0, 3]$

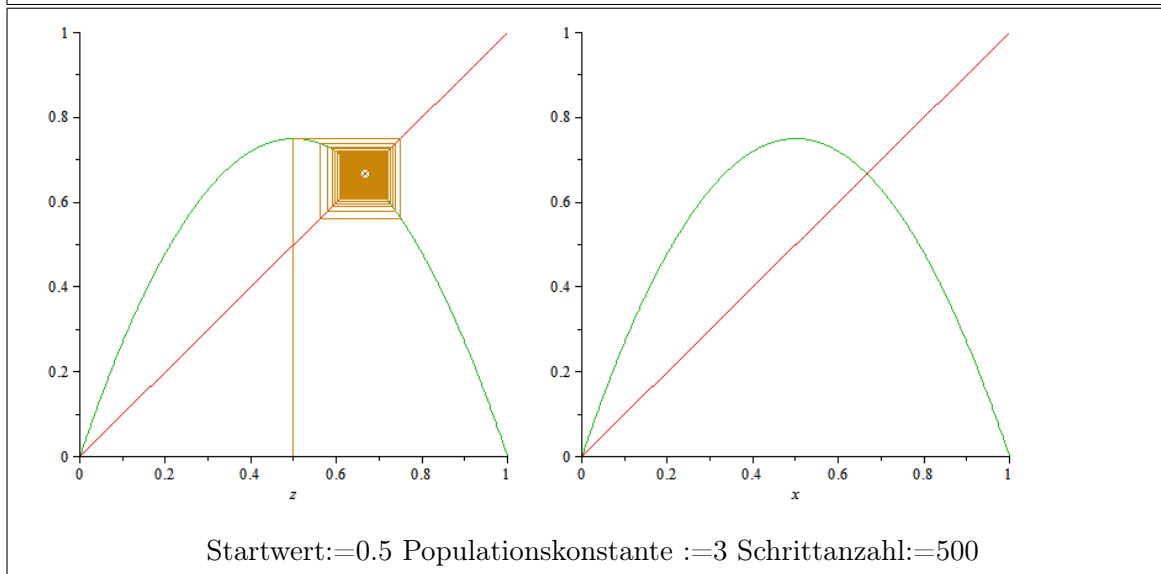
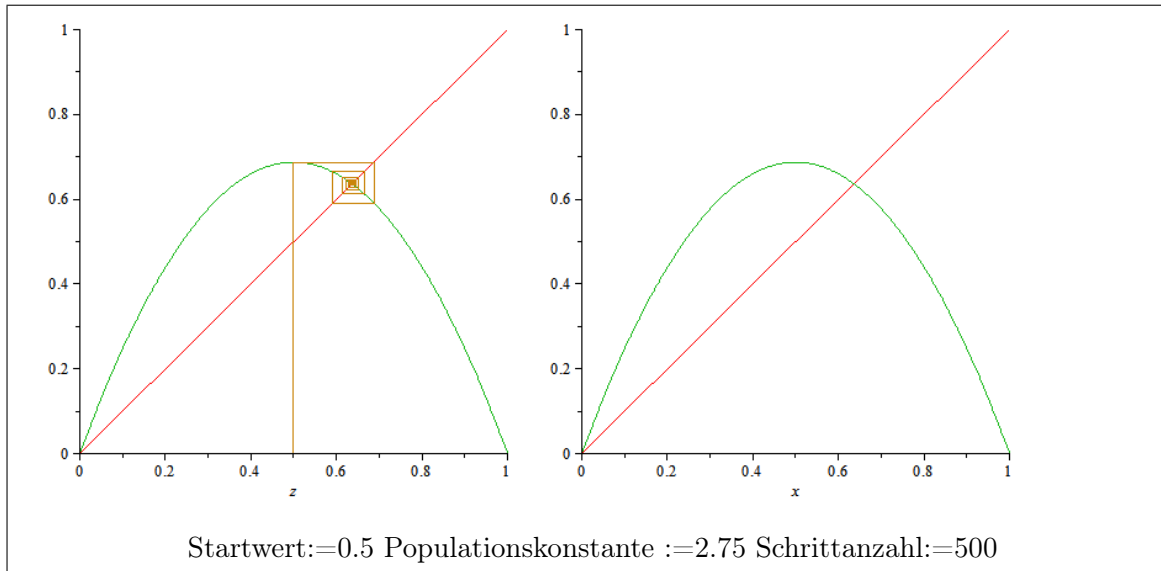
Wie auch schon beim Zeitverhalten im vorherigen Kapitel zeigen die **Trajektorien** ein Fixpunktverhalten. Für $r > 1$ entfernt sich der Fixpunkt von der Null.





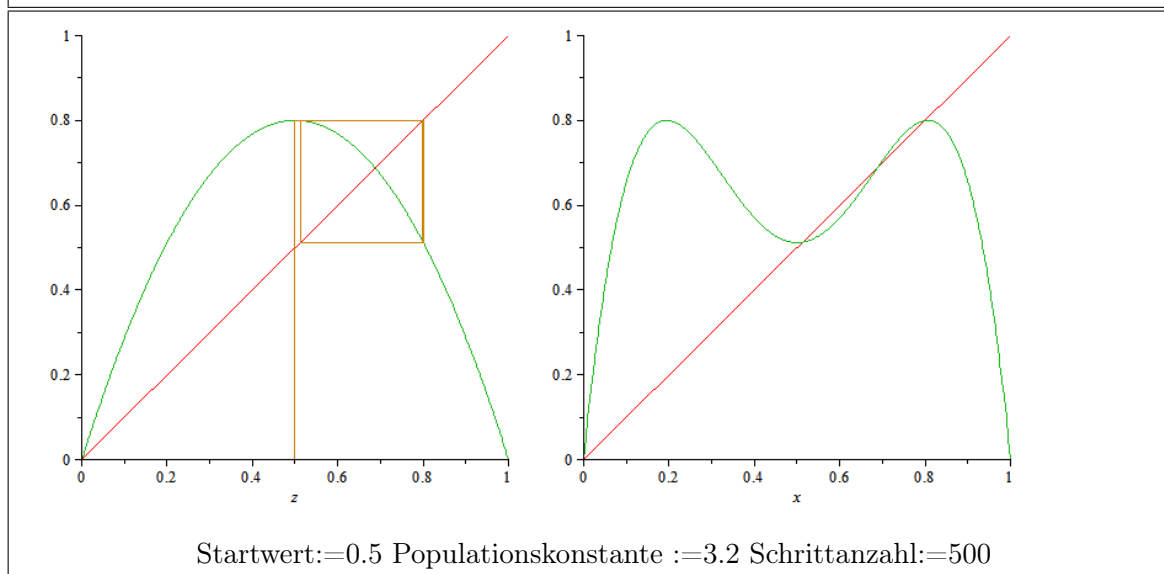
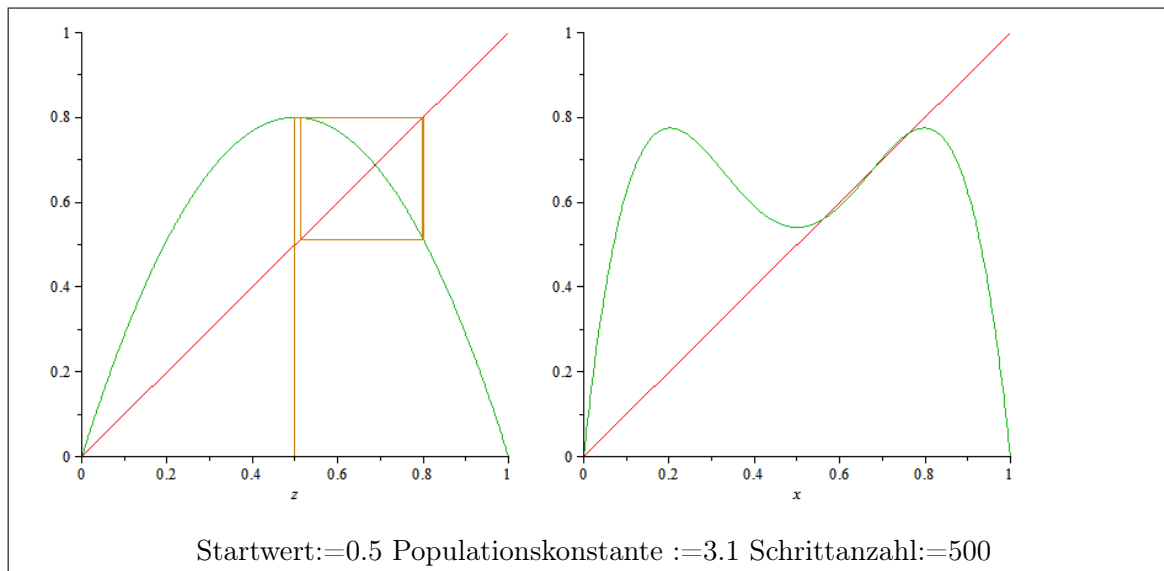


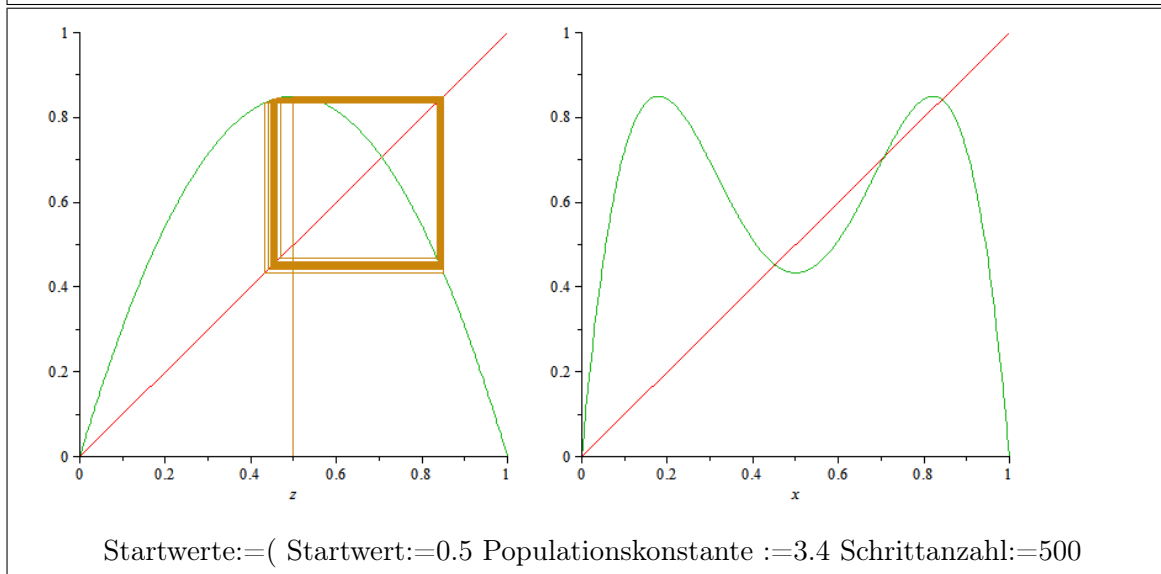
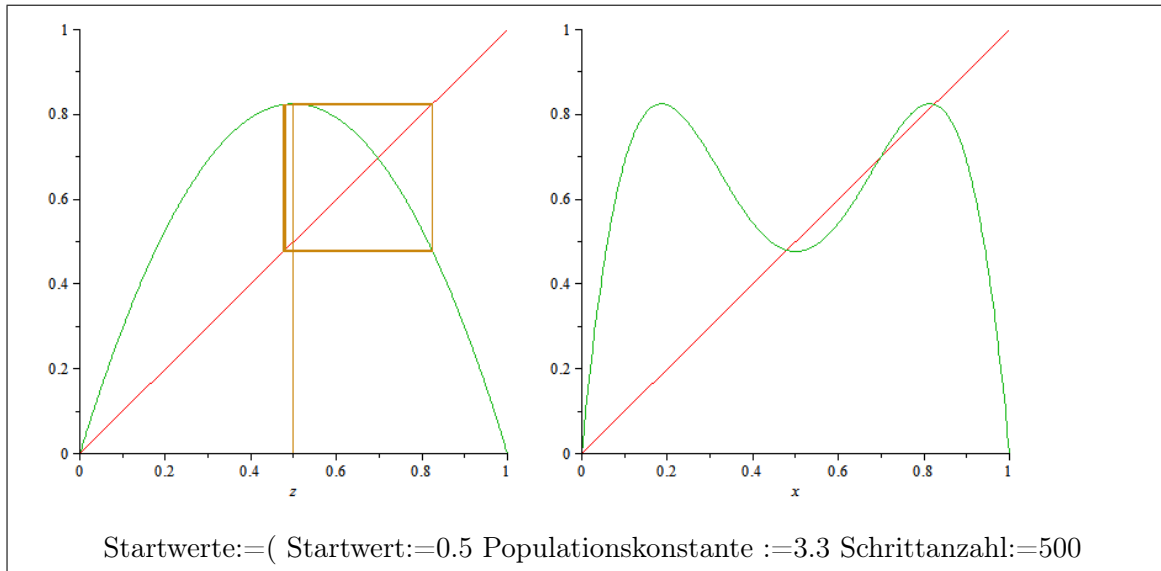




5.3.2 Das Langzeitverhalten für $r \in (3, 3.4]$

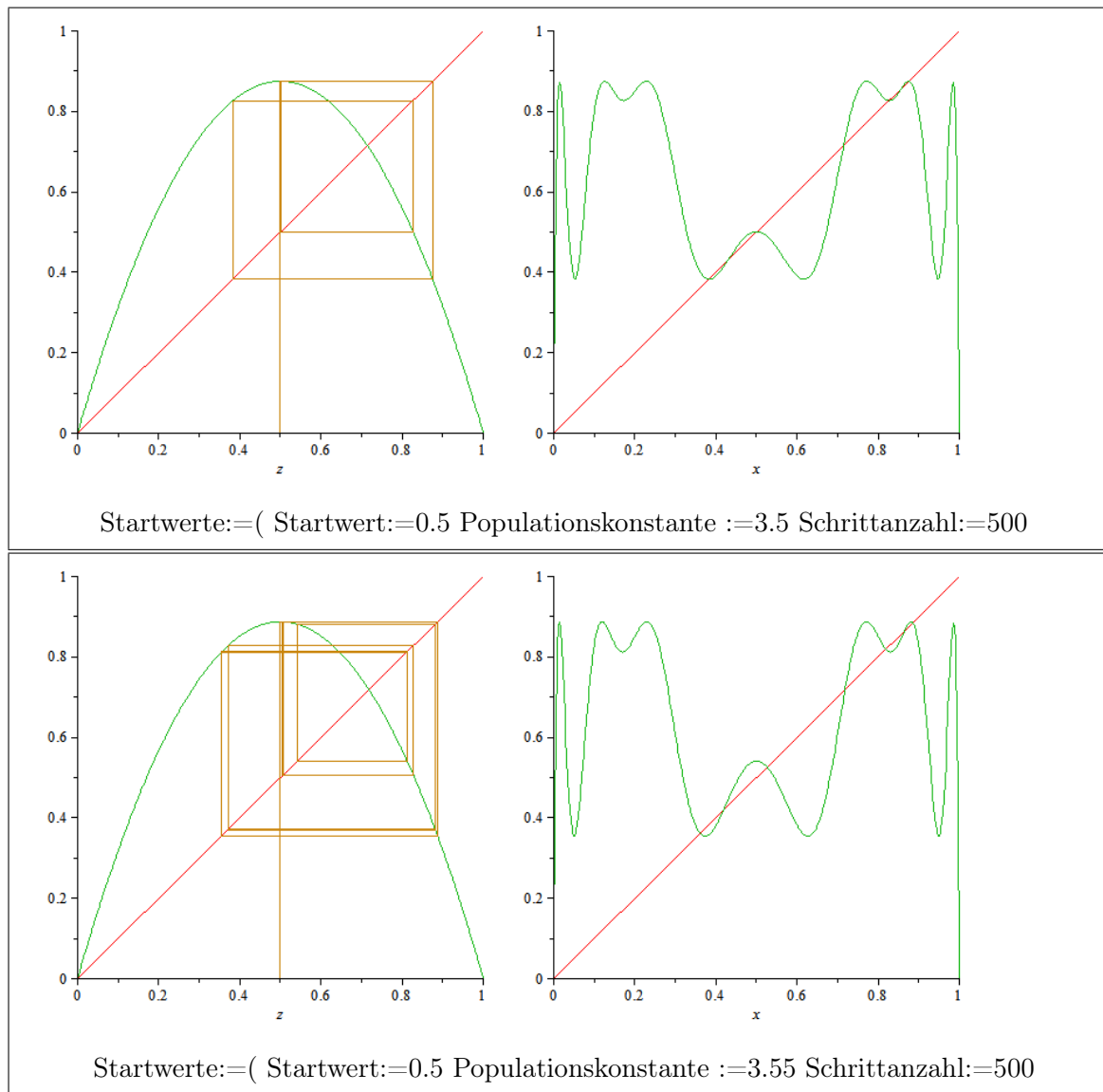
Für $3 < r \leq 3.4$ bilden sich 2-Zyklen. Die **Trajektorien** bleiben an den beiden Fixpunkten stabil. Die Funktion f^2 besitzt vier Schnittpunkte mit der Winkelhalbierenden. Zwei die Schnittpunkte sind die stationären Fixpunkte.





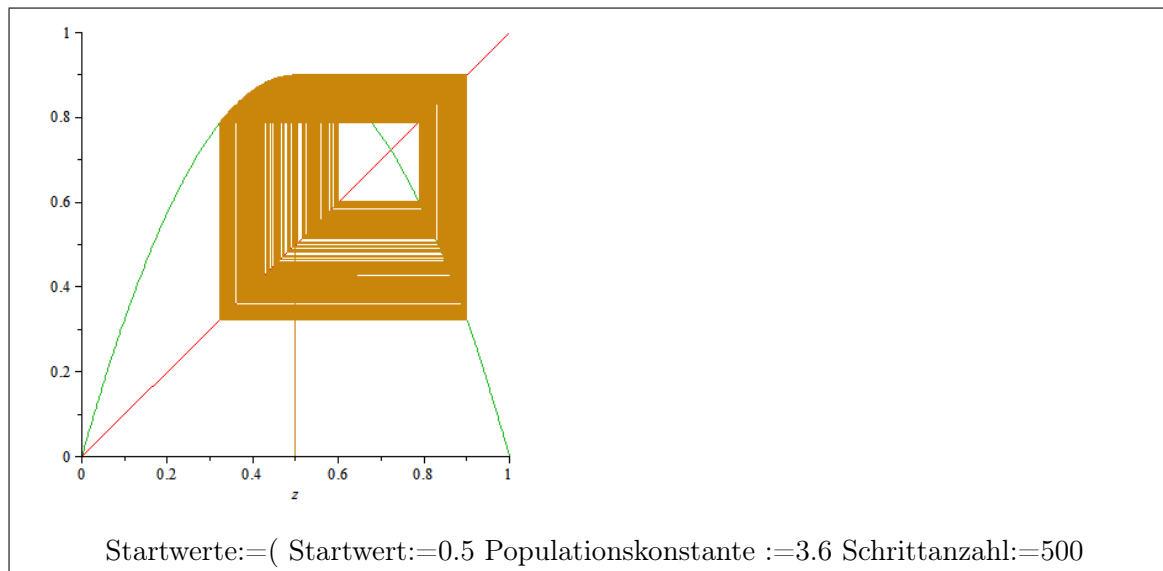
5.3.3 Das Langzeitverhalten für $r \in (3.4, 3.55]$

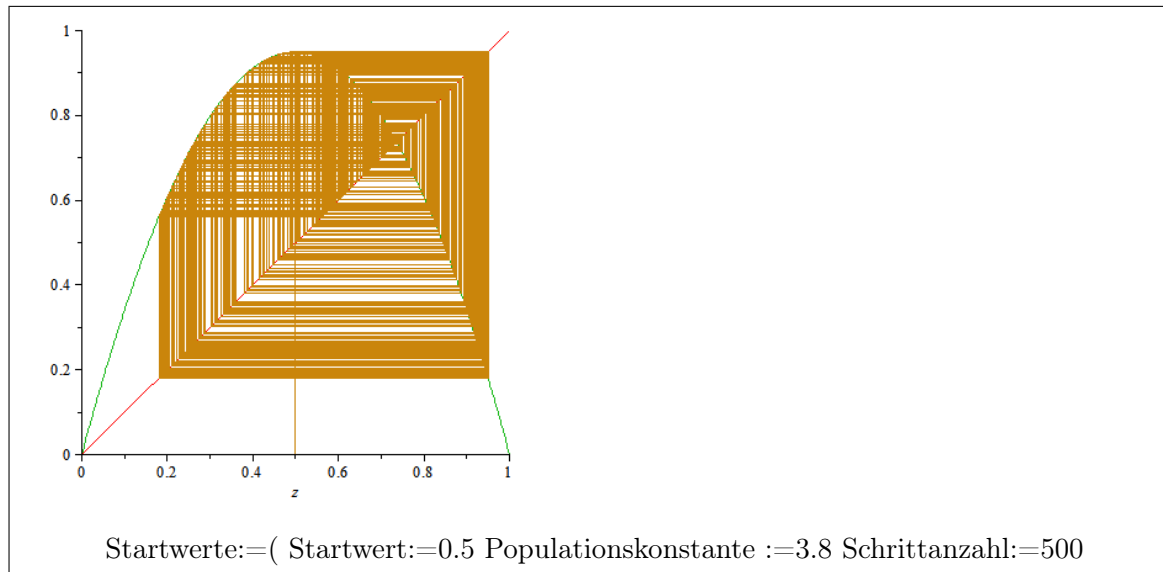
Die Trajektorien steuern nun vier Fixpunkte an. Die Funktion f^4 besitzt acht Schnittpunkte mit der Winkelhalbierenden. Vier dieser Schnittstellen sind die bereits berechneten für die Funktion f^2 .



5.3.4 Das Langzeitverhalten für $r \in (3.55, 4]$

Der Übergang ins Chaos erfolgt bei $r \geq 3.6$. Die Trajektorien besitzen keine stabilen Fixpunkte mehr. Es kann keine Funktion mehr gegenübergestellt werden. Die logistische Gleichung bildet nun ein chaotisches System.





6 Das Langzeitverhalten der logistischen Gleichung mithilfe der Fixpunktiteration

Um das Langzeitverhalten der logistischen Gleichung analytisch zu bestimmen, wird die Fixpunktiteration angewendet. Die Idee der Fixpunktiteration besteht darin, die Gleichung, deren Fixpunkte bestimmt werden sollen, auf folgende Form zu bringen:

$$x = f(x) \tag{6.1}$$

Durch das Umstellen dieser Gleichung nach x erhält man die Fixpunkte. Für eine konkrete Aussage über das Verhalten des Systems in diesem kritischen Punkt ist es zwingend notwendig, das Verhalten des Punktes auf benachbarte Punkte zu untersuchen.

6.1 Fixpunktiteration für einen Fixpunkt

Aufstellung der Fixpunktgleichung:

$$x = rx(1 - x) \tag{6.2}$$

Auflösen der Klammer:

$$x = rx - rx^2 \tag{6.3}$$

Die Gleichung nach Null auflösen:

$$rx^2 + x(1 - r) = 0 \tag{6.4}$$

Ausklammern von x :

$$x(rx + 1 - r) = 0 \tag{6.5}$$

Nullsetzen der Faktoren ergibt folgende Lösungen:

$$x_1 = 0 \tag{6.6}$$

$$x_2 = \frac{r - 1}{r} \tag{6.7}$$

Die beiden entstandenen Fixpunkte sind die stationären Fixpunkte des System.

6.2 Fixpunktiteration für zyklische Fixpunkte

Wie das Beispiel der graphischen Iteration gezeigt hat, kommt man für $r > 3$ in einen zyklischen Bereich. Die Berechnung von zyklischen Fixpunkten ist im Gegensatz zu der vorangegangenen Fixpunktberechnung aufwendiger. Für die Analyse von periodischen Lösungen eines nichtlinearen diskreten Systems sieht die Fixpunktgleichung folgendermaßen aus:

$$x = f^{(n)}(x) \quad (6.8)$$

Die Anzahl der Perioden beträgt n .

Der Ansatz zur Berechnung der beiden Fixpunkte ist:

$$x = f^{(2)}(x) \quad (6.9)$$

Einsetzen der Gleichung:

$$x = r(rx - rx^2) - r(rx - rx^2)^2 \quad (6.10)$$

Umstellen nach Null:

$$0 = r(rx - rx^2) - r(rx - rx^2)^2 - x \quad (6.11)$$

Normierung der rechten Seite:

$$0 = x^4 - 2x^3 + \left(1 + \frac{1}{r}\right)x^2 + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r}\right)x \quad (6.12)$$

Abspalten der stationären Lösung 6.6:

$$0 = x^3 - 2x^2 + \left(1 + \frac{1}{r}\right)x + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r}\right) \quad (6.13)$$

Abspalten der Lösung 6.7 mithilfe der Polynomdivision ergibt folgende quadratische Gleichung:

$$0 = x^2 + \left(-1 - \frac{1}{r}\right)x + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \quad (6.14)$$

Das Einsetzen in die Lösungsformel ergibt folgende zwei Fixpunkte:

$$x_1 = \frac{1 + r + \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r} \quad (6.15)$$

$$x_2 = \frac{1 + r - \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r} \quad (6.16)$$

6.3 Stabilität der Fixpunkte mithilfe des Lyapunov-Exponenten

Der Lyapunov-Exponent bestimmt die Wachstumsrate benachbarter **Trajektorien**. In der Chaostheorie kann er als Indikator für Ordnung beziehungsweise Chaos dienen, da er die sensitive Abhängigkeit der Endwerte von den Startwerten darstellen kann.

6.3.1 Herleitung des Lyapunov-Exponenten

Betrachtet werden zwei verschiedene Startwerte x_0 und y_0 eines nichtlinearen dynamischen Systems. Der Abstand dieser beiden Punkte zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt ε . Daraus ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$$x_{n+1} = f^n(x_0) \quad (6.17)$$

$$y_{n+1} = f^n(y_0) = f^n(x_0 + \varepsilon) \quad (6.18)$$

Den Abstand der beiden Trajektorien beträgt zum Zeitpunkt $t = n + 1$:

$$d(x_{n+1}, y_{n+1}) = |f^n(x_0) - f^n(x_0 + \varepsilon)| \quad (6.19)$$

Bei einer exponentiellen Dynamik wächst der Abstand der beiden Trajektorien mit einer exponentiellen Rate. Die Gleichung für den Abstand lautet:

$$d(x_{n+1}, y_{n+1}) = \varepsilon e^{n\lambda(x_0)} \quad (6.20)$$

Die Gleichungen 6.19 und 6.20 werden gleich gesetzt:

$$|f^n(x_0) - f^n(x_0 + \varepsilon)| = \varepsilon e^{\lambda n} \quad (6.21)$$

Das Umstellen nach λ ergibt folgenden Ausdruck:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|f^n(x_0) - f^n(x_0 + \varepsilon)|}{\varepsilon} \right) \quad (6.22)$$

Entscheidend ist nun die Betrachtung des Grenzfalles für $n \rightarrow \infty$ und $\varepsilon \rightarrow 0$.

Die entsprechende Gleichung lautet:

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|f^n(x_0) - f^n(x_0 + \varepsilon)|}{\varepsilon} \right) \quad (6.23)$$

Der Ausdruck

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{|f^n(x_0) - f^n(x_0 + \varepsilon)|}{\varepsilon} \right) \quad (6.24)$$

entspricht dem Differentialquotienten. Aus 6.23 und 6.24 erhält man dann folgende Gleichung:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\delta f^n(x_0)}{\delta x_0} \right) \quad (6.25)$$

Durch Anwendung der **Kettenregel**

$$f^2(x) = f(f(x)) \quad (6.26)$$

$$f^{2'}(x) = f'(f(x)) * f'(x) \quad (6.27)$$

in iterativer Form $f'(f(x_n)) = f'(x_{n+1})$

$$f^{2'}(x) = f'((x_{n+1})) * f'(x_n) \quad (6.28)$$

vereinfacht sich der Ausdruck 6.26 zu:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^{n-1} f'(x_i) \right) \quad (6.29)$$

Da der Logarithmus eines Produktes gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren ist ergibt sich folgende Gleichung für den Lyapunov-Exponenten λ :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right) \quad (6.30)$$

(Rechnung angelehnt an MAHNKE, 1994, S. 168)

6.4 Anwendung des Lyapunov-Exponenten

Der Lyapunov-Exponent gibt an, wie sehr sich zwei benachbarte Trajektorien im zeitlichen Verlauf von einander entfernen. Für die systemkritischen Punkte lässt sich nun

eine Aussage über deren Stabilität treffen.

$$\lambda = \begin{cases} > 0 & \text{Instabil} \\ < 0 & \text{Stabil} \end{cases}$$

6.4.1 Untersuchung der stationären Fixpunkte mithilfe des Lyapunov-Exponenten

Die beiden stationären Fixpunkte wurden bereits im Kapitel 6.1 berechnet.

$$x_1 = 0 \tag{6.31}$$

$$x_2 = \frac{r-1}{r} \tag{6.32}$$

Für x_1 ergibt sich folgende Rechnung:

$$\lambda = \ln|f'(x_1)| \tag{6.33}$$

Die Stabilität des Fixpunktes gilt im folgenden Bereich:

$$|f'(x_1)| < 1 \tag{6.34}$$

Aufstellen der Gleichungen an den Grenzen des Intervalls ergibt:

$$r = 1 \tag{6.35}$$

$$r = -1 \tag{6.36}$$

Für $r \geq 0$ ergibt sich eine Stabilität nach Lyapunov für den Fixpunkt $x_1 = 0$ im Intervall $r \in [0, 1]$.

Für x_2 ergibt sich folgende Rechnung:

$$\lambda = \ln|f'(x_2)| \tag{6.37}$$

Die Stabilität des Fixpunktes gilt im folgenden Bereich:

$$|f'(x_2)| < 1 \tag{6.38}$$

Aufstellen der Gleichungen an den Grenzen des Intervalls ergibt:

$$2 - r = 1 \quad (6.39)$$

$$2 - r = -1 \quad (6.40)$$

Für $r \geq 0$ ergibt sich eine Stabilität nach Lyapunov für den Fixpunkt $x_2 = \frac{r-1}{r}$ im Intervall $r \in (1, 3]$.

6.4.2 Untersuchung der Stabilität des 2-Zyklus

Die beiden Werte des 2-Zyklus wurden bereits im Kapitel 6.2 berechnet.

$$x_1 = \frac{1 + r + \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r} \quad (6.41)$$

$$x_2 = \frac{1 + r - \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r} \quad (6.42)$$

Für x_1 und x_2 ergibt sich folgende Rechnung:

$$\lambda = \frac{1}{2} \ln |f'(x_1)f'(x_2)| \quad (6.43)$$

Die Stabilität des Fixpunktes gilt im folgenden Bereich:

$$|f'(x_1)f'(x_2)| < 1 \quad (6.44)$$

Einsetzen der beiden Werte x_1 und x_2 in $f'(x) = r - 2rx$ ergibt:

Für x_1 :

$$f'(x_1) = r - 2r \left(\frac{1 + r + \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r} \right) \quad (6.45)$$

$$f'(x_1) = -1 - \left(\sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \quad (6.46)$$

Für x_2 :

$$f'(x_2) = r - 2r \left(\frac{1 + r - \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r} \right) \quad (6.47)$$

$$f'(x_2) = -1 + \left(\sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \quad (6.48)$$

Aufstellen der Gleichungen an den Grenzen des Intervalls ergibt:

$$\left(-1 - \left(\sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \right) \left(-1 + \left(\sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \right) = 1 \quad (6.49)$$

$$\left(-1 - \left(\sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \right) \left(-1 + \left(\sqrt{r^2 - 2r - 3} \right) \right) = -1 \quad (6.50)$$

Auflösen der Klammern mithilfe der dritten Binomischen Formel, ergibt folgende Gleichungen:

$$(1 - (r^2 - 2r - 3)) = 1 \quad (6.51)$$

$$(1 - (r^2 - 2r - 3)) = -1 \quad (6.52)$$

Umstellen nach Null:

$$(r^2 - 2r - 3) = 0 \quad (6.53)$$

$$(r^2 - 2r - 5) = 0 \quad (6.54)$$

Einsetzen in die quadratische Lösungsformel ergibt für 6.53:

$$r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4} \quad (6.55)$$

Für $r \geq 0$:

$$r = 1 + 2 = 3 \quad (6.56)$$

Einsetzen in die quadratische Lösungsformel ergibt für 6.54:

$$r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6} \quad (6.57)$$

Für $r \geq 0$:

$$r = 1 + \sqrt{6} \quad (6.58)$$

Für $r \geq 0$ ergibt sich eine Stabilität nach Lyapunov für die zyklischen Fixpunkt $x_1 = \frac{1+r+\sqrt{r^2-2r-3}}{2r}$ und $x_2 = \frac{1+r-\sqrt{r^2-2r-3}}{2r}$ im Intervall $r \in (3, 1 + \sqrt{6}]$.

7 Das Langzeitverhalten der logistischen Gleichung mithilfe der Fixpunktiteration

Aus dem 2-Zyklus bildet sich ein 4-Zyklus. Die Iterationsvorschrift lautet:

$$x = f^4(x) \tag{7.1}$$

Das entstandene Polynom ist vom Grad 16 und nach Abtrennen der Lösungen 6.6,6.7,6.15,6.16 erhält man ein Polynom vom Grad 12. Dieses ist analytisch nicht mehr exakt lösbar. Mithilfe von Maple ist eine numerische Annäherung an die Lösungen möglich.

7.1 Die Prozedur „zyklus“

Die Prozedur „zyklus“ soll für Parameterwerte $r > 3$ die **Bifurkationswerte** bestimmen. Da man mit Polynomen vom Grad größer als 16 arbeitet, muss die Genauigkeit von Maple sehr hoch eingestellt sein, damit alle Ergebnisse ausgerechnet werden können. Die erste for-Schleife gibt an, bis zu welchem Bifurkationspunkt die Prozedur ablaufen soll. Die nächste for-Schleife bestimmt die Genauigkeit der Bifurkationspunkte. Die while-Schleife wird nun so lange durchlaufen, bis die entstandenen Fixpunkte nicht mehr stabil sind. In die Liste a kommen alle Werte der zugrunde liegenden Fixpunktiteration. In Liste c finden sich die Werte der davor berechneten Fixpunkte. Da man die Fixpunkte der vorherigen Bifurkation von den neuen Werten abtrennen kann, folgt dieses mit dem Maple-Operator minus, welcher den Schnitt von zwei Mengen berechnet. In der nächsten for-Schleife wird z bestimmt und am Ende werden die Bifurkationspunkte ausgegeben.

```
1 > ziklus := proc (b)
2 local j, k, l, f, Df, a, c, d, r, z, e;
3 Digits := 200;
4 r := b;
5 f := x -> r*x^2+x*r ;
6 Df := D(f);
7 e := .1;
8 for j to 7 do
9 for k to 8 do
10 z := 1;
11 while z <= 1 do
12 a := {fsolve((f@@(2^j))(x) = x, x)};
```

```
13 c := {fsolve((f@@(2^(j-1)))(x) = x, x)};
14 d := 'minus'(evalf(a, 20), evalf(c, 20));
15 a := [d];
16 z := 1;
17 for l to 2^j do
18 z := z*abs(evalf(Df(a[1, l])))
19 end do;
20 r := r+e end do;
21 r := r-2*e;
22 e := .1/10^k
23 end do;
24 r := r+20*e;
25 e := 0.1e-1;
26 print(evalf(r, 7))
27 end do
28 end proc;
```

7.2 Ergebnisse der Prozedur „zyklus“

Mit einem Startwert für die Populationskonstante von $r = 3.4$ wird das Programm von einem Bifurkationspunkt zum nächsten immer langsamer. Für Zyklen größer 128 kann folgende Prozedur angewandt werden.

n-Zyklus	Stabilitätsbereich (r)
2	$3 < r \leq 1 + \sqrt{6}$
4	$1 + \sqrt{6} < r \leq 3.544090$
8	$3.544090 < r \leq 3.564407$
16	$3.564407 < r \leq 3.568759$
32	$3.568759 < r \leq 3.569692$
64	$3.569692 < r \leq 3.569891$
128	$3.569891 < r \leq 3.569934$

7.3 Auswertung der Bifurkationspunkte

Die Bifurkationspunkte bilden eine gewisse Regelmäßigkeit. Durch Bilden der Differenzen von je zwei nachfolgenden Bifurkationspunkten erhält man folgende Reihe von Werten: 0.449490, 0.094600, 0.020317, 0.004352, 0.000933, 0.000199, 0.000043

Nun werden die Vorgänger durch ihre Nachfolger dividiert. Es entsteht die folgende Reihe: 4.751479, 4.65619, 4.66843, 4.66452, 4.68844, 4.67907

Diese Werte nähern sich scheinbar einem bestimmten Wert. Die Bifurkationswerte erfüllen die Bedingungen einer geometrischen Reihe, somit gilt:

$$\hat{F} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+2} - r_{k+1}} \quad (7.2)$$

Durch Einsetzen der Bifurkationspunkte erhält man folgenden Wert:

$$\hat{F} = 4.669202 \quad (7.3)$$

Diesen Wert nennt man die universelle Feigenbaumkonstanten. Mithilfe dieses Wertes lässt sich nun der Kontrollparameter r_∞ der logistischen Gleichung für den Übergang ins Chaos berechnen.

$$r_\infty = \frac{\hat{F}r_{k+1} - r_k}{\hat{F} - 1} \quad (7.4)$$

Das Ergebnis lautet:

$$r_\infty = 3.5699456 \quad (7.5)$$

(Rechnung vgl. MAHNKE, 1994, S. 174)

8 Das Feigenbaumdiagramm der logistischen Gleichung

Für eine Zusammenfassung der gesammelten Informationen eignet sich das Feigenbaumdiagramm. Das Feigenbaumdiagramm geht auf den US-amerikanischen Physiker Mitchell Jay Feigenbaum (* 19. Dezember 1944 in Philadelphia, Pennsylvania) zurück. Feigenbaum, welcher auch als ein Pionier der Chaosforschung gilt, entdeckte die Universalität der Periodenverdopplung.

8.1 Die Prozedur „feigenbaum“

Die Prozedur „feigenbaum“ stellt das Feigenbaumdiagramm graphisch dar. Die Prozedur wird mit den Parameterwerten a , b , c und d übergeben. Die Parameter a und b geben den Definitionsbereich des Feigenbaumdiagramms an, im Speziellen den Bereich für den Kontrollparameter r . Der Parameter c gibt den Startwert x_0 an und d definiert die Länge der Schritte. Nach der Definition der lokalen Variablen wird s eine zweidimensionale Liste zugeordnet. Die Variable r übernimmt den Startwert des Definitionsbereichs. Die while-Schleife wird solange durchlaufen, bis der Definitionsbereich komplett abgedeckt ist. Der Variablen x wird der Parameter c übergeben. Die nun folgende for-Schleife dient zum „Einschwingen“ des Systems. Die nächste for-Schleife übernimmt den letzten Iterationswert der Schleife davor und trägt die Werte in die Liste s ein. Der Befehlsoperator „union“ steht für die Vereinigung von Mengen, sodass keine doppelten Werte auftreten können. Zum Schluss wird die Liste s graphisch ausgegeben.

```
1 > restart;
2 > with(plots);
3 > feigenbaum := proc (a, b, c, d)
4   local r, x, s, k;
5   s := {};
6   r := a;
7   while r <= b do
8     x := c;
9     for k to 500 do
10      x := r*x*(1-x)
11    end do;
12    for k to 30
13      do x := r*x*(1-x);
14      s := 'union'(s, {[r, evalf(x, 4)]})
```

```
15 end do;
16 r := r+d
17 end do;
18 plot(s, style = point, view = [a .. b, 0 .. 1], color = black)
19 end proc;
```

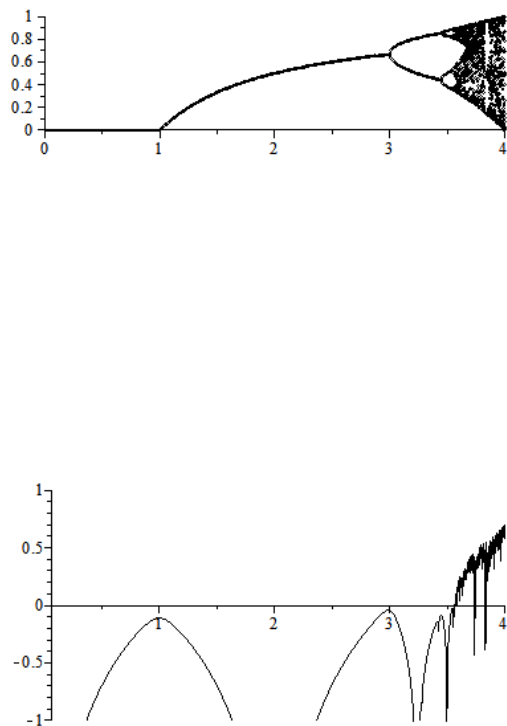
8.2 Die Prozedur „lyapunov“

Die Prozedur „lyapunov“ stellt den Lyapunov-Exponenten graphisch dar. Die Prozedur wird mit den gleichen Parametern wie die „feigenbaumprozedur“ übergeben. Die while-Schleife dient ebenfalls zum Durchlaufen des Definitionsbereiches. In der for-Schleife werden die Iterationswerte berechnet. Diese dienen als Argumente für den Lyapunov-Exponenten. In der Liste s werden nun die Werte für den Lyapunov-Exponenten gespeichert. Zum Schluss wird die List s ausgegeben.

```
1 lyapunov := proc (a, b, c, d)
2 local r, x, s, k, lja, z;
3 lja := 0;
4 s := {};
5 r := a;
6 while r <= b do
7 x := c;
8 lja := 0;
9 for k to 50 do
10 x := r*x*(1-x);
11 if abs(r*(1-2*x)) <> 0 then
12 lja := lja+ln(abs(r*(1-2*x)));
13 z := z+1
14 end if
15 end do;
16 s := 'union'(s, {[r, lja/z]});
17 z := 0;
18 r := r+d
19 end do;
20 plot(s, style = line, view = [a .. b, -1 .. 1], color = black)
21 end proc
```


8.3 Feigenbaumdiagramm mit Lyapunov-Exponenten für $r \in [0, 4]$

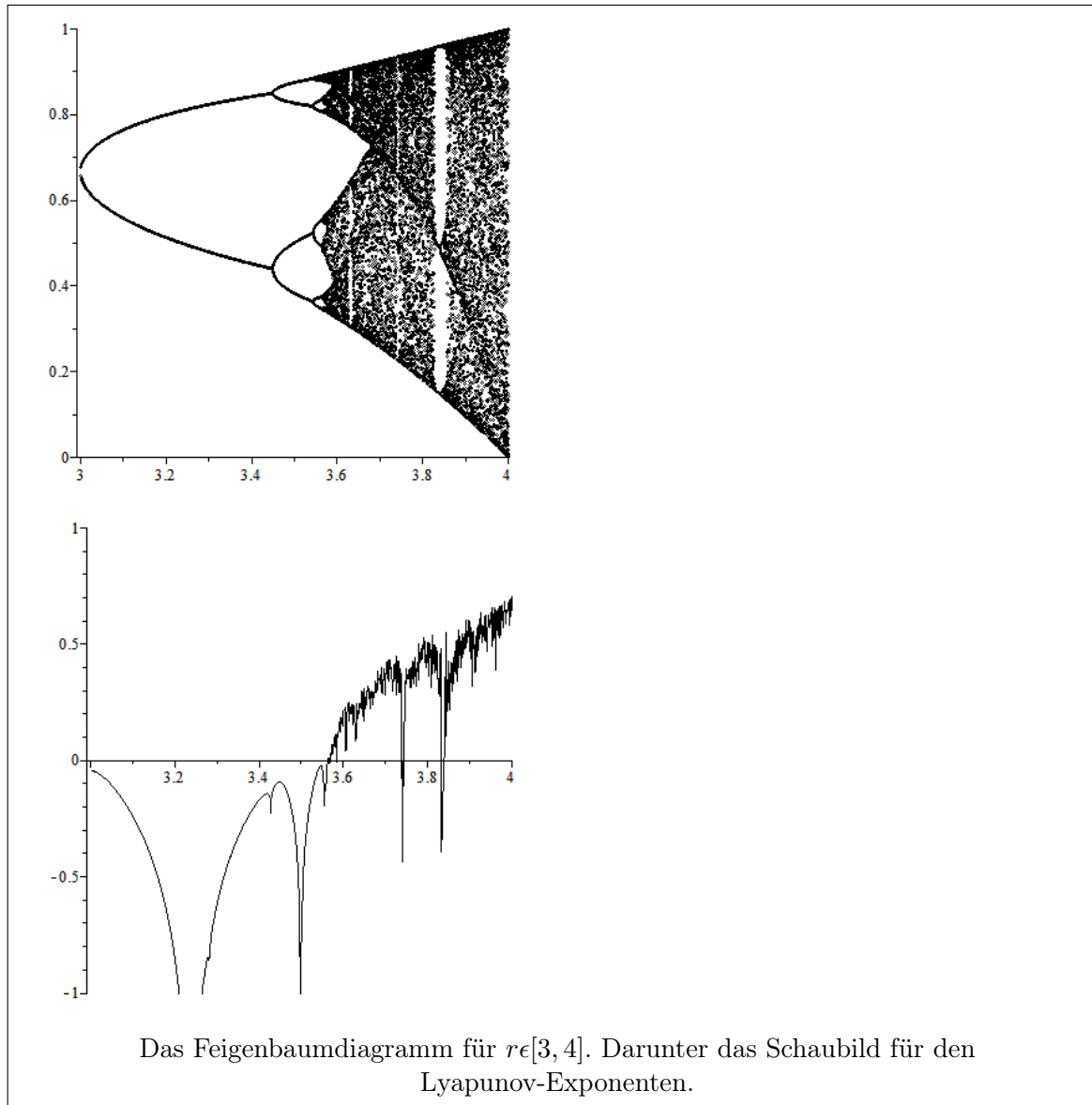
Das erste Schaubild stellt das Feigenbaumdiagramm über seinem gesamten Definitionsbereich dar. Die Funktion für den Lyapunov-Exponenten gibt die Stabilität an. Man kann anhand dieses Schaubildes bereits Aussagen über die Gültigkeit der in den Kapiteln zuvor bestimmten **Attraktoren** machen.



Das Feigenbaumdiagramm für $r \in [0, 4]$. Darunter das Schaubild für den Lyapunov-Exponenten.

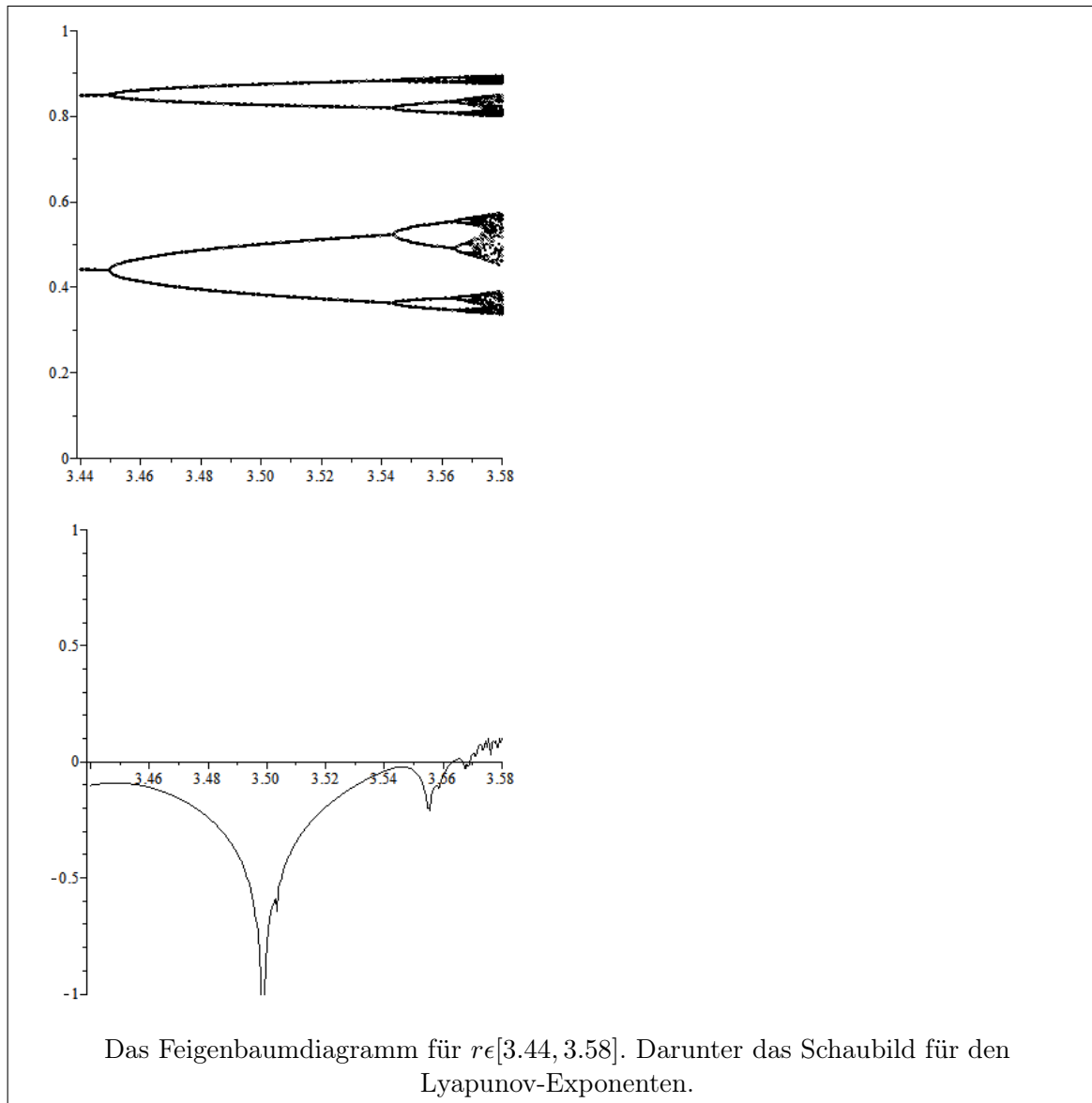
8.3.1 Feigenbaumdiagramm mit Lyapunov-Exponenten für $r \in [3, 4]$

In dem Bereich für $r \in [3, 4]$ sieht man die stabilen Bereiche der logistischen Gleichung bereits deutlich. Auffällig sind zudem die stabilen Stellen im chaotischen Bereich, welche durch Aufhellung im Feigenbaumdiagramm als auch in der Funktion des Lyapunov-Exponenten zu sehen sind.



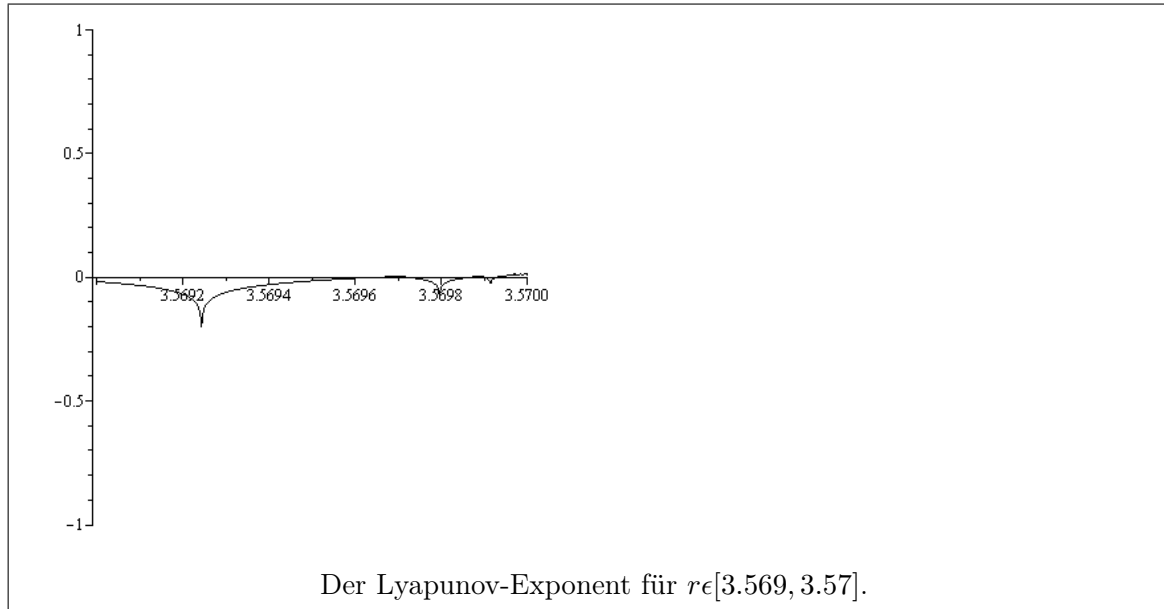
8.3.2 Feigenbaumdiagramm mit Lyapunov-Exponenten für $r \in [3.44, 3.58]$

Bei einer Vergrößerung des zu betrachtenden Bereich fällt auf, das sich bestimmte Muster wiederholen. In den hier dargestellten Bereichen sieht man die Bifurkationsübergänge für höhere Zyklen. Der Lyapunov-Exponent geht ungefähr für $r > 3.57$ in den positiven Bereich, welches der Beginn vom Chaos ist. An den Bifurkationspunkten entstehen neue Zyklen. Die alten Zyklen bleiben trotzdem erhalten, sind aber instabil. Solche Erscheinungen sind so genannte Heugabelbifurkationen.



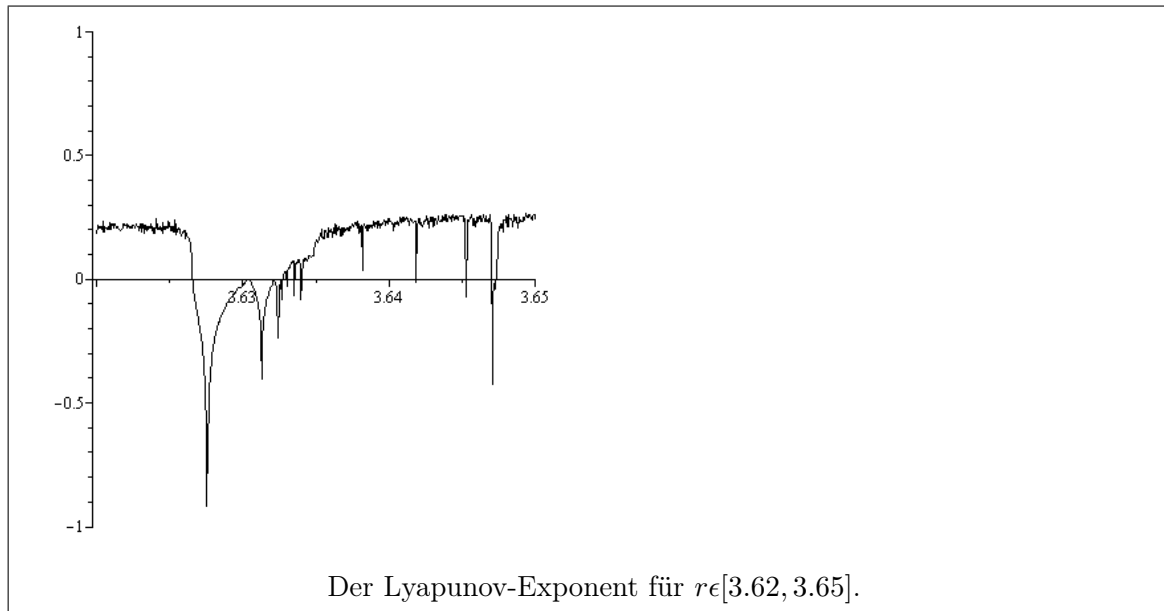
8.3.3 Der Lyapunov-Exponenten für $r \in [3.569, 3.57]$

Das Schaubild stellt einen sehr großen Bereich des Übergangs in das chaotische System dar. Man kann bereits gut den Wert des kritischen Kontrollparameters erkennen, der im Kapitel zuvor berechnet wurde.



8.4 Inseln der Ruhe im chaotischen Bereich

Wie schon zuvor erwähnt, kommen im Feigenbaumdiagramm helle Zonen vor. In diesen Zonen findet ein Übergang vom Chaos in die Ordnung statt. Dieses Verhalten hält zwar nicht lange an, gibt aber Hinweise auf Stabilität im chaotischen Bereich.



8.5 Fraktale

In Feigenbaumdiagrammen kann man bestimmte Muster feststellen die sich stetig wiederholen. Solche Muster nennt man Fraktale (aus dem lat. fractale = zerbrechlich). Der Begriff Fraktal stammt vom Chaosforscher Benoît Mandelbrot. In seiner Mandelbrot-Menge finden sich wie auch im Feigenbaumdiagramm Fraktale wieder. Die Muster, die diese Fraktale bilden, findet man in natürlichen oder künstlichen Objekten. Natürliche Objekte sind zum Beispiel Schneeflocken, Wolken oder Küstenlinien. Künstliche Objekte sind das Feigenbaumdiagramm oder die Mandelbrotmenge. Fraktale weisen einen hohen Grad von Selbstähnlichkeit auf. Selbstähnlichkeit kann zum Beispiel bei einer Rückkopplung entstehen. (Der Begriff Rückkopplung ist bereits bei der Einführung der logistischen Gleichung aufgetreten. Hier gab es eine Rückkopplung zwischen den Raubfischen und den Friedfischen.) Ein einfaches Beispiel für eine Rückkopplung ist das Bild-in-Bild-Prinzip. Eine Kamera wird auf ihr Ausgabegerät, den Monitor, gerichtet. Auf dem Monitor entstehen dadurch Bilder in Bildern. Bei einer bestimmten Stellung der Kamera gehen die Bilder in ein chaotisches Verhalten über. Objekte, die man als Fraktale bezeichnet, beste-

hen aus kleinen Kopien des Objektes selbst. Küstenlinien sind natürliche Fraktale. Die Küstenlinie der Insel Rügen zu bestimmen, erweist sich als kompliziert. Man müsste anhand einer Karte die Länge der Küstenlinie messen. Mit abnehmenden Maßstab verändert sich die Länge der Küstenlinie. Im nächsten Schritt müsste man die Länge zu Fuß zu bestimmen. Je genauer man misst, desto länger wird die Küste. Möchte man die ganz genaue Länge ausmessen, so müsste man jedes Sandkorn, dass sich zur Grenze zum Wasser befindet ausmessen. Küstenlinien haben einen hohen Grad der Selbstähnlichkeit. Stellt man sich eine Bucht vor, so kann man diese Form auch als vielfache Verkleinerung im küstennahen Bereich finden.

9 Die Chaostheorie

Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas?

Diese Frage stellte Edward N. Lorenz 1972 während eines Vortrages bei der American Association for the Advancement of Science. Lorenz selbst war Meteorologe und stellte durch Zufall fest, dass die kleinsten Veränderungen der Startwerte zu einem völlig anderen Resultat führen können. Laut Kevin Trenberth, einem Schüler von Lorenz und Hurrikan-Forscher, gab Lorenz zweimal hintereinander die vermeintlich gleichen Werte eines Wettermodells in den Computer ein und erhielt für ihn völlig überraschend zwei extrem unterschiedliche Werte. Im Nachhinein stellte sich heraus, dass sich ein Wert im micro Bereich verändert hatte. Diese Tatsache brachte Lorenz zur Erkenntnis, dass die kleinsten Veränderungen in der Ursache dramatische Veränderungen in der Wirkung haben können. Dieses Phänomen wird heute als **deterministisches Chaos** bezeichnet. Obwohl für Lorenz die Erforschung dieses Themas eher die Aufgabe der Meteorologie war, fand es schnell auch Anhänger in anderen Wissenschaften. Lorenz erhielt für seine Entdeckung 1991 den Kyoto-Preis für Grundwissenschaften. Den Nobelpreis bekam er jedoch nie, da es ihn für die Meteorologie nicht gibt. (Vgl. RICHTER, 2009, Edward Lorenz, stiller Revolutionär)

9.1 Die Chaosforschung

Das Erforschen des Chaos ist ein Teilgebiet der nichtlinearen Dynamik, welches sich mit speziellen dynamischen Systemen beschäftigt. Im Besonderen wird das zeitliche Verhalten dieser Systeme untersucht, welches nicht vorhersagbar ist. Die Berechenbarkeit der Systemgleichungen führt zu einer Begriffsnamenerweiterung. Man spricht in diesem Zusammenhang vom **deterministischen Chaos**. Es entsteht, wenn Systeme die Bedingungen der starken **Kausalität** verletzen.

9.2 Die Geschichte der Chaostheorie

Im 19. Jahrhundert stellte sich die Frage über die Stabilität des Sonnensystems. Man wollte wissen, ob die Möglichkeit bestünde, dass das Universum in sich zusammenbricht. Bedeutende Wissenschaftler versuchten sich an diesem Problem, schafften jedoch idealisierte Systeme, die nur näherungsweise der Wirklichkeit entsprachen. Erst der französische Mathematiker Henri Poincaré kam der Lösung auf die Spur. Diese Lösung war in sich betrachtet niederschmetternd, da Poincaré herausfand, dass die Vorhersage über

die Stabilität des Sonnensystems nicht möglich ist und damit die Annahme der Nichtzerbrechlichkeit des Universums weiter offen blieb. Für Poincaré stellten mathematische Differentialgleichungen die Lösung des Problems dar, die nicht berechenbar sind, obwohl sie Lösungen haben. Er stellte aber auch heraus, dass auf kurzfristige Sicht die Möglichkeit besteht, das Verhalten des Sonnensystems vorherzusagen, aber niemals auf langfristige Sicht. Durch diesen Ansatz gilt Poincaré auch als Urvater der Chaostheorie. (KINNEBROCK, 2011, Vgl.)

Obwohl das Phänomen von chaotischen Prozessen schon länger bekannt war, ermöglichte erst die Erfindung des Computers eine genauere Betrachtung dieser Systeme. Es war schließlich auch ein Computer, der Lorenz zu seiner Theorie verhalf. Mit dem Computer war es nun möglich, spezielle Theorien der Unvorhersehbarkeit durch numerische Verfahren zu untermauern. Es begann das Zeitalter der Chaostheorie.

Einer der ersten Wissenschaftler, die sich mit diesem Bereich der Wissenschaft beschäftigten, war Mitchell Feigenbaum. Er untersuchte das Phänomen der logistischen Gleichung und fand die nach ihm benannte Feigenbaumkonstante. Auf ihm beruht auch das Feigenbaumdiagramm.

9.3 Grundlagen der Chaosforschung

Die Chaostheorie untersucht das zeitliche Verhalten von Systemen, die einer deterministischen chaotischen Dynamik unterliegen. Eine Grundvoraussetzung ist, dass es sich um ein nichtlineares System handelt. Ein solches System kann ein physikalisches Experiment darstellen. Physikalische Experimente sind in der Regel durch Gleichungen beschreibbar, welche berechnet werden können. Nun ist es aber so, dass man bestimmte Anfangszustände eines Experiments nie zu Hundertprozent wiederherstellen kann. Als Folge können andere Endzustände zustande kommen. Dieses wird als sensitive Abhängigkeit der Startwerte bezeichnet. Selbst am Computer können sich solche Abhängigkeiten von der Anfangsbedingung bilden, wenn man die Rechengenauigkeit verändert. Im Phasenraum betrachtet weisen die Trajektorien, welche am Anfang sehr dicht zusammenliegen, im weiteren Verlauf eine immer größere Distanz auf. Nicht alle chaotischen Systeme zeigen auf ihren gesamten Definitionsbereich chaotisches Verhalten. Ein Beispiel ist die logistische Gleichung. (KINNEBROCK, 2011, Vgl.)

9.4 Zufall oder Chaos

In der Umgangssprache werden chaotische System oft mit stochastischen Systemen verwechselt. Deterministische chaotische Systeme sind in der Regel berechenbar, was stochastischen nicht unbedingt sein müssen.

10 Beispiel für chaotisches Verhalten in unserem Leben

10.1 Der Stau aus dem Nichts

Der Verkehr in Deutschland wird von sogenannten Verkehrsüberwachungsstellen geregelt. Dieses gilt insbesondere für die Autobahnen. Sehr leistungsfähige Computer berechnen den Verkehrsfluss und können über digitale Anzeigetafeln auf der Autobahn den Verkehr weitestgehend regeln. Das Ziel dieser Überwachung ist es, Stau zu verhindern. Die Computer greifen bei der Beurteilung von Fahrern auf stochastische Methoden zurück. So gibt es einen Anteil von Langsamfahrern oder Schnellfahrern auf der Autobahn, welches der Computer zur Berechnung seiner Prognosen verwendet. Trotz dieses hohen Aufwandes kommt es immer wieder zu Staus auf den Autobahnen in Deutschland, die scheinbar aus dem Nichts entstehen und die die modernsten Computer nicht vorhersagen können. Solch ein Stau kann zum Beispiel durch das Verhalten eines einzigen Fahrers entstehen, der beim Wechseln der Spur den nachfolgenden Fahrer zum Bremsen zwingt, um den Sicherheitsabstand einhalten zu können. Die Geschwindigkeitsdifferenz dieses Fahrers kann sich um nur wenige Meter pro Sekunde verlangsamt haben, löst aber eine Kettenreaktion aus, die die Geschwindigkeitsdifferenzen der nachfolgenden Fahrer erhöht, bis ein Fahrzeug zum Stillstand kommt. Ab diesem Moment kann das Verkehrsleitsystem die Prognosen wieder ziemlich genau berechnen. Hätte der Fahrer, der die Spur gewechselt hat, mehr Platz gehabt und hätte der nachfolgende Fahrer nicht bremsen müssen, so wäre es nicht zum Stau gekommen. (Vgl. CHAOS, Die Chaos Theorie-Quarks und Co)

10.2 Der plötzliche Herztod

Eine der häufigsten Todesursachen in Deutschland ist der sogenannte plötzliche Herztod. Dieser wird oft durch einen kranken Herzmuskel ausgelöst. Mithilfe eines EKGs können Herztöne über einen längeren Zeitraum bestimmt werden. Nun schlägt das Herz nicht so gleichmäßig wie ein Metronom, sollte aber dennoch eine Regelmäßigkeit der Schläge aufweisen. Generiert man das Zeitverhalten in einem dreidimensionalen Phasenraum, so zeigt ein gesundes Herz eine Art Keule. Werden jedoch Streuungen um diese herum gezeigt, so kann diese auf einen Herzfehler hindeuten. So können mithilfe des Langzeit-EKG bereits winzige Veränderungen in den Herzschlägen gefunden werden. (Vgl. MAHNKE, 1994, S. 15-18)

11 Iterative Verfahren in der Schule

11.1 Momentane Situation an Schulen in Mecklenburg-Vorpommern

Die logistische Gleichung als ein Beispiel für das chaotische Verhalten eines dynamischen Systems wird in der Schule nicht thematisiert. Im Rahmenplan von Mecklenburg-Vorpommern für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 wird der Begriff Iteration nicht genannt. Auch die Suche nach iterativen Verfahren bleibt erfolglos. Erst im Rahmenplan für die Sekundarstufe 2 werden das Newton-Verfahren oder das Sekantennäherungsverfahren behandelt. Diese Verfahren werden in der Schule zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen von Polynomen mit einem Grad $n \geq 3$ benutzt. Da jedoch die Verbreitung des **CAS**-Rechners in den Gymnasien von Mecklenburg-Vorpommern zunimmt, verlieren iterative Verfahren zunehmend an Bedeutung.

11.2 Möglichkeiten von iterativen Verfahren in der Schule

In der 9. Klasse werden in aller Regel quadratische Gleichungen der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ eingeführt. Im Gegensatz zu linearen Gleichungen ist das Auflösen nach x nicht von einfacher Natur. Die sogenannte Lösungsformel kann über die quadratische Ergänzung hergeleitet werden.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad | : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0 \quad | \text{ Variablentransformation } p = \frac{b}{a} \text{ und } q = \frac{c}{a}$$

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \quad | \text{ Bildung eines Binoms mit Ergänzung}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

Im Schulunterricht wird jedoch meistens nur die Lösungsformel angewendet, was eine gewisse Abhängigkeit des Schülers zum Tafelwerk zur Folge hat. In größeren Klausuren, in denen stets ein Kopfrechenteil enthalten ist, es also weder mit Taschenrechner noch mit Tafelwerk gearbeitet werden darf, kommt es oft zu Problemen beim Lösen von quadratischen Gleichungen, falls der Schüler diese vorher nicht auswendig gelernt hat. Mithilfe der Iteration könnte der Schüler die quadratische Gleichung für ganzzahlige Ergebnisse auch ohne die Lösungsformel berechnen.

Eine weitere Möglichkeit zur Anwendung besteht in der Flächenberechnung von Kreisen. Um eine Näherung zu erhalten, könnten Quadrate in den Kreis gezeichnet werden. Je mehr Quadrate eingezeichnet werden, desto genauer ist die Berechnung des Flächeninhaltes. Dieses würde zur Herleitung der Flächeninhaltsformel für den Kreis dienen und den Schülern gleichzeitig die Unmöglichkeit der genauen Berechnung der Kreisfläche vor Augen führen.

In der Sekundarstufe 2 können iterative numerische Verfahren zum Lösen von Differentialen oder Integralen dienen.

12 Fazit

Ziel der vorliegenden Examensarbeit war es, die logistische Gleichung als ein Beispiel für chaotische Prozesse in der Physik zu betrachten. Zu diesem Zweck wurde das Zeitverhalten der logistischen Gleichung mithilfe analytischer sowie numerischer Methoden untersucht. Bei diesen Untersuchungen stellte sich heraus, dass die logistische Gleichung in Abhängigkeit ihres Kontrollparameters chaotisches Verhalten aufweist, im speziellen sogar deterministisches Chaos. Das System weist sensitive Abhängigkeiten der Endzustände gegenüber den Anfangszuständen auf. Die Untersuchungen zeigen ebenfalls, dass die logistische Gleichung, bevor sie ins Chaos übergeht, die Gesetze der Kausalität nicht verletzt, wie es auch mit dem Anfangsbeispiel dem tropfenden Wasserhahn ist. Andererseits muss festgestellt werden, dass die Prozessorgeschwindigkeiten der Computer ihre Grenzen haben. Dieses wird aber auch immer so sein und somit wird es chaotische Systeme immer geben. Vielleicht es ist mal Möglich das Wetter für mehr als drei Wochen vorauszusagen, aber nie für die gesamte Ewigkeit.

Die Entwicklung der zyklischen Fixpunkte unter der besonderen Betrachtung im Feigenbaumdiagramm führt zu Fraktalen und somit zu einem Vergleich zur Mandelbrotmenge. Durch die Bestimmung der Bifurkationspunkte gelingt es, die Feigenbaumkonstante herzuleiten. Bei der Betrachtung alltäglicher Phänomene, deren Verhalten chaotische Züge annehmen können, fällt die Universalität dieser Prozesse auf. Die Phänomene entstehen stets durch winzige Fluktuationen in ihren Anfangsbedingungen, welches oft zu unerwarteten Ergebnissen führt.

Die Entstehung der Chaostheorie durch Poincaré veranschaulicht die Veränderung von einem deterministischen Weltbild in die chaotische Welt und die Probleme die daraus entstehen. Der Blick in die Chaosforschung gibt einen kurzen Einblick in die Vielseitigkeit dieses noch so jungen Forschungsgebiets und seine wissenschaftsübergreifende Rolle. Im Bezug zur Schule stellt sich heraus, dass iterative Verfahren in der Schule keine Bedeutung haben. Es aber dennoch Möglichkeiten zur Behandlung in der Schule gibt, die von Lehrern aufgegriffen werden können.

Abschließend kann festgestellt werden, dass chaotische Prozesse allgegenwärtig sind. Sie gehören zu unserem Leben. Chaotisches System erlauben es nicht, existenzielle Fragen über unsere Zukunft zu beantworten. Was nützt es der Menschheit, wenn Poincaré die Frage nach der Stabilität des Sonnensystems mit einer für uns schlechten Prognose beantwortet hätte?

Literaturverzeichnis

[chaos] Die Chaostheorie. In: *Quarks und Co*

[mahnke 1994] *Nichtlineare Physik in Aufgaben*. Teubner Studienbücher, 1994

[kinnebrock 2011] *Bedeutende Theorien des 20. Jahrhunderts*. Oldenbourg Verlag München, 2011

[Königsberger] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis 2*. Springer-Lehrbuch. – ISBN 3-540-20389-3

[Richter 2009] RICHTER, Peter: Edward Lorenz, stiller Revolutionär. In: *Die Zeit* (2009). – <http://www.zeit.de/online/2008/17/edward-lorenz-nachruf>

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die anderen Werken vom Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, habe ich unter Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht. Mir ist bekannt, dass gemäß § 17 der Rechtsverordnung die Prüfung wegen einer Pflichtwidrigkeit (Täuschung u. ä.) für nicht bestanden erklärt werden kann.

Ort, Datum

Unterschrift